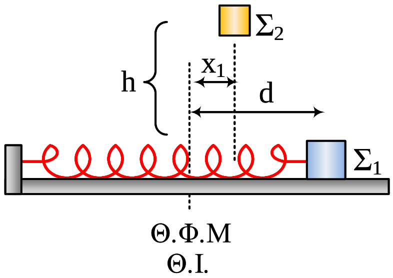
Μας έπεσε ο ουρανός στο κεφάλι.



Ένα σώμα $Σ_1$, μάζας $m_1 = 4$ kg, βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k = 200 N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το ελατήριο έχει αρχικά το φυσικό του μήκος. Ασκώντας δύναμη, μετατοπίζουμε το σώμα ώστε το ελατήριο να επιμηκυνθεί κατά d = 0,6 m, και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα (από την ηρεμία), να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση σταθεράς D = k. Σε μια επόμενη χρονική στιγμή, κατά την οποία το σώμα $Σ_1$ διέρχεται για πρώτη φορά από μια θέση όπου το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $x_1 = 0,2$ m, ένα δεύτερο σώμα $Σ_2$, που έχει αφεθεί από ύψος h = 0,8 m, μάζας $m_2 = 20/3$ kg, συγκρούεται πλαστικά με το σώμα $Σ_1$, χωρίς το συσσωμάτωμα να αναπηδήσει. Να βρείτε:

α. τα μέτρα των ταχυτήτων των σωμάτων λίγο πριν την κρούση τους

β. την απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων που χάθηκε κατά την κρούση

γ. ποιο σώμα αφέθηκε πρώτο να κινηθεί

δ. σε πόση απόσταση από τη θέση όπου αφέθηκε ελεύθερο το σώμα $Σ_1$ θα μηδενιστεί στιγμιαία η ταχύτητα του συσσωματώματος για πρώτη φορά.

Δίνεται: $g = 10\ m/s^2$ και $\sqrt{2}\pi \simeq 4,44s$

Λύση

α. Η θέση ισορροπία και η θέση Φ.Μ. ταυτίζεται στο οριζόντιο ελατήριο και αφού αρχικά επιμηκύναμε το ελατήριο κατά d = 0,6 m, συμπεραίνουμε ότι και το πλάτος της ταλάντωσης του $Σ_1$ θα είναι A = 0,6 m. Η ταχύτητα του $Σ_1$ μπορεί να υπολογιστεί με εφαρμογή της Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση στην θέση x_1.

$$E = K_1 + U_1 \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{k(A^2 - x_1^2)}{m_1}} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1 = 4\frac{m}{s}}$$

Το $Σ_2$ εκτελεί ελεύθερη πτώση, έτσι έχουμε:

$$h = \frac{1}{2}g\Delta t_2^2 \Rightarrow \Delta t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta t_2 = 0,4s} \quad \text{και} \quad \upsilon_2 = g\cdot\Delta t_2 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_2 = 4\ m/s}$$

β. Κατά την κρούση ισχύει η Α.Δ.Ο. μόνο για τον οριζόντιο άξονα (x′x), αφού εκεί ασκείται μόνο η δύναμη που έχει σχετικά μικρό μέτρο ($F_{ελ}$ = 40 N) οπότε το σύστημα μπορεί να θεωρηθεί μονωμένο.

$$\vec{p}_{αρχ,x} = \vec{p}_{τελ,x} \Rightarrow m_1 υ_1 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow \mathbf{V = 1,5\frac{m}{s}}$$

Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος είναι:

$$E_{απ} = \frac{1}{2}m_1υ_1^2 + \frac{1}{2}m_2υ_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 \Rightarrow \mathbf{E_{απ} = \frac{220}{3}J}$$

γ. Έχουμε ήδη υπολογίσει το χρόνο πτώσης του $Σ_2$ αρκεί να βρούμε και το χρονικό διάστημα που κινήθηκε το ταλαντούμενο σώμα από την στιγμή που αφέθηκε ως τη στιγμή της κρούσης.

Θεωρώντας θετική τη φορά της αρχικής απομάκρυνσης έχουμε:

Για $t_0 = 0$: $x = Αημφ_0 \Rightarrow A = Αημφ_0 \Rightarrow ημφ_0 = 1 \Rightarrow φ_0 = \frac{π}{2}$ rad και $k = m_1ω^2 \Rightarrow ω = 5\sqrt{2}\,\frac{rad}{s}$

Άρα $x = 0,6ημ(5\sqrt{2}t + \frac{π}{2})$ και για x_1 = 0,2 m, έχουμε: $ημ(5\sqrt{2}t + \frac{π}{2}) = \frac{1}{3}$ (1).

Η (1) δεν μπορεί να επιλυθεί χωρίς την χρήση υπολογιστικής μηχανή, έτσι θα πρέπει να σκεφτούμε διαφορετικά βρίσκοντας όχι ακριβώς το χρονικό διάστημα $Δt_1$, αλλά μεταξύ ποιων τιμών μπορεί να κυμαίνεται, από γνωστά χρονικά διαστήματα.

Το $Σ_1$ αν δεν γινόταν η κρούση το $Σ_1$ θα έφτανε στη Θ.Ι. σε χρονικό διάστημα:

$$Δt = \frac{T}{4} = \frac{2π}{4ω} = \frac{π}{2\cdot 5\sqrt{2}}s = \frac{π\sqrt{2}}{20}s \simeq 0,222\,s.$$

Αλλά $Δt_1 < Δt < Δt_2$. Άρα πρώτα αφέθηκε το $Σ_2$.

δ. Η Θ.Ι. ισορροπίας της ταλάντωσης δεν αλλάζει εξαιτίας της κρούσης, (Θ.Ι. και Θ.Φ.Μ. θα ταυτίζονται και στην ταλάντωση του συσσωματώματος). Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση του συσσωματώματος στην θέση x_1.

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow A' = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)V^2}{k} + x_1^2} \Rightarrow \mathbf{A' = 0,4m}$$

Άρα η θέση που αφέθηκε το $Σ_1$ και η θέση που σταματά το συσσωμάτωμα απέχουν $d' = d + A' \Rightarrow$ **d′ = 1 m**.