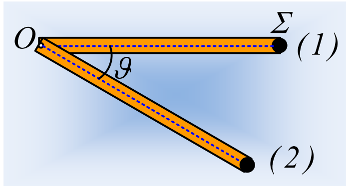
Η ράβδος και η σημειακή μάζα.



Μια ομογενής ράβδος μήκους ℓ=1,5m και μάζας m=3kg μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το άκρο της Ο. Στο άλλο άκρο της ράβδου δένουμε ένα σώμα Σ, της ίδιας μάζας m με τη ράβδο και αμελητέων διαστάσεων (υλικό σημείο), οπότε έτσι δημιουργούμε ένα στερεό s. Φέρνουμε το στερεό στη θέση (1) ώστε η ράβδος να είναι οριζόντια και το αφήνουμε να κινηθεί.

i) Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του στερεού s, ως προς τον άξονα περιστροφής του.

ii) Να βρεθεί η αρχική γωνιακή επιτάχυνση του στερεού, καθώς και η δύναμη F που ασκείται στο σώμα Σ από τη ράβδο, αμέσως μόλις αφεθεί το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί.

iii) Μετά από λίγο, η ράβδος σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ, όπου ημθ=0,6, ευρισκόμενη στη θέση (2). Για τη θέση αυτή ζητούνται:

α) Η κινητική ενέργεια του στερεού s.

β) Η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής του σώματος Σ, κατά (ως προς) τον άξονα περιστροφής στο Ο.

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του στερεού s.

iv) Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης F (που ασκεί η σανίδα στο σώμα Σ), από την θέση (1) μέχρι τη θέση (2).

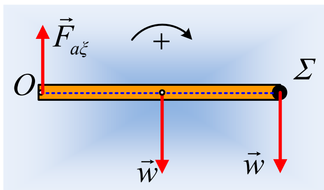
Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της στο Ο, $I_1 = 1/3\ m\ell^2$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

i) Για τη ροπή αδράνειας του στερεού το οποίο αποτελείται από τη ράβδο και το υλικό σημείο Σ, θα έχουμε ότι $I_s = I_1 + I_2$ όπου I_1 η ροπή αδράνειας της ράβδου και I_2 η ροπή αδράνειας η οποία οφείλεται στο σώμα Σ. Έτσι έχουμε:

$$I_s = \frac{1}{3}m\ell^2 + m\ell^2 = \frac{4}{3}m\ell^2 = \frac{4}{3}3\cdot 1{,}5^2\,kgm^2 = 9kgm^2.$$

ii) Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό s, μόλις αφεθεί να κινηθεί. Με εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα παίρνουμε:



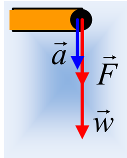
$$\Sigma\tau = I_s a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow w\cdot\frac{\ell}{2} + w\cdot\ell = I_s a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{3mg\ell}{2I_s} = \frac{3\cdot 3\cdot 10\cdot 1{,}5}{2\cdot 9}rad/s^2 = 7{,}5rad/s^2.$$

Αλλά τότε το σώμα Σ, αποκτά επιτάχυνση, κατακόρυφη, όπως στο σχήμα με μέτρο:

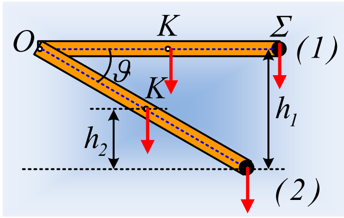
$$\alpha_\Sigma=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot \ell = 7{,}5\cdot 1{,}5 m/s^2 = 11{,}25 m/s^2 .$$

Οι δυνάμεις όμως που ασκούνται στο Σ είναι το βάρος και μια δύναμη από τη σανίδα F, ενώ από το 2^o νόμο του Νεύτωνα για υλικό σημείο ($\Sigma\vec{F}=m\vec{a}$) η επιτάχυνση έχει την κατεύθυνση της συνισταμένης δύναμης. Αλλά τότε και η δύναμη από τη ράβδο είναι κατακόρυφη, οπότε:



$$F+mg=m\alpha_\Sigma \rightarrow F=m(\alpha_\Sigma-g)=3\cdot(11{,}25-10)N=3{,}75N.$$

iii) Στη διάρκεια της περιστροφής του στερεού οι δυνάμεις που παράγουν έργο είναι τα δυο βάρη, δυνάμεις συντηρητικές, οπότε η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή.



α) Έτσι θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το άκρο της ράβδου, στη θέση (2) έχουμε:

$$K_1+U_1=K_2+U_2 \rightarrow$$

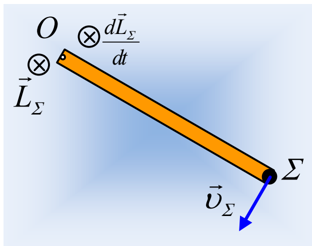
$$0+2mgh_1=K_2+mgh_2 \rightarrow 2mg\ell\cdot\eta\mu\vartheta = K_2 + mg\frac{\ell}{2}\cdot\eta\mu\vartheta \rightarrow$$

$$K_2=\frac{3}{2}mg\ell\cdot\eta\mu\vartheta=\frac{3}{2}3\cdot 10\cdot 1{,}5\cdot 0{,}6 J = 40{,}5J$$

β) Η παραπάνω κινητική ενέργεια είναι ίση με $K_2=\frac{1}{2}I_s\omega_2^2 \rightarrow$

$$\omega_2=\sqrt{\frac{2K_2}{I_s}}=\sqrt{\frac{2\cdot 40{,}5}{9}}rad/s=3rad/s$$

Οπότε η στροφορμή του Σ, το οποίο θεωρούμε υλικό σημείο που εκτελεί κυκλική κίνηση, έχει τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής, φορά προς τα μέσα και μέτρο:



$$L_\Sigma=m\upsilon_\Sigma r = m\omega\ell^2 \rightarrow$$

$$L_\Sigma=3\cdot 3\cdot 1{,}5^2 kgm^2/s = 20{,}25kgm^2/s.$$

Την ίδια κατεύθυνση έχει και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς τον άξονα περιστροφής στο άκρο Ο, του σώματος Σ, ενώ το μέτρο του είναι:

$$\frac{dL_\Sigma}{dt}=\frac{d(m\upsilon_\Sigma r)}{dt}=m\frac{d|\upsilon|}{dt}\ell=ma_{\varepsilon\pi}\ell=ma_{\gamma\omega\nu}\cdot\ell^2\rightarrow$$

Αλλά στη θέση αυτή:

$$\Sigma\tau=I_s a_{\gamma\omega\nu 1}\rightarrow w\cdot\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\theta + w\cdot\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = I_s a_{\gamma\omega\nu 1}\rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu 1}=\frac{3mg\ell\sigma\upsilon\theta}{2I_s}=\frac{3\cdot 3\cdot 10\cdot 1{,}5\cdot 0{,}8}{2\cdot 9}rad/s^2=6rad/s^2.$$

$$\frac{dL_\Sigma}{dt} = ma_{\gamma\omega\nu} \cdot \ell^2 = 3 \cdot 6 \cdot 1{,}5^2\, kgm^2 / s^2 = 40{,}5 kgm^2 / s^2 .$$

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του στερεού είναι ίσος με το ρυθμό που οι ασκούμενες δυνάμεις (ροπές) παράγουν έργο:

$$\frac{dK}{dt} = P_{\Sigma\tau} = (\Sigma\tau)\omega_2 = \left(mg\frac{\ell}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + mg\ell \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \right)\omega_2 \rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{3}{2} mg\ell \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \omega_2 = \frac{3}{2} 3 \cdot 10 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 3 J / s = 162 J / s$$

iv) Εφαρμόζουμε για το σώμα Σ το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από τη θέση (1) στη θέση (2):

$$K_{\Sigma 2} - K_{\Sigma 1} = W_w + W_F \rightarrow$$

$$W_F = \frac{1}{2} m\upsilon_\Sigma^2 - W_w = \frac{1}{2} m\omega_2^2 \ell^2 - mg\ell \cdot \eta\mu\vartheta \rightarrow$$

$$W_F = \frac{1}{2} m\omega_2^2 \ell^2 - mg\ell \cdot \eta\mu\vartheta = \frac{1}{2} 3 \cdot 3^2 \cdot 1{,}5^2 J - 3 \cdot 10 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}6 J = 3{,}375 J$$

dmargaris@gmail.com