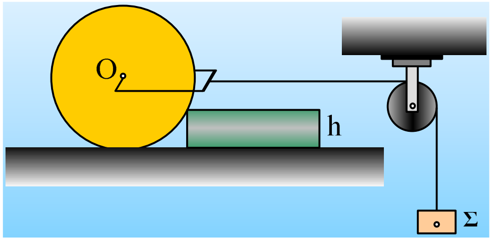
Υπερπήδηση εμποδίου.

Σαν συμπληρωματικά στοιχεία πάνω στην άσκηση 4.57 του σχολικού βιβλίου, αλλά και σαν συνέχεια της ανάρτησης «*Μια ισορροπία κυλίνδρου με εμπόδιο*» ας εξετάσουμε πώς επηρεάζεται η υπερπήδηση ενός εμποδίου από ένα κύλινδρο, από το αν αναπτύσσεται ή όχι τριβή μεταξύ κυλίνδρου και εμποδίου.

Εφαρμογή 1η:



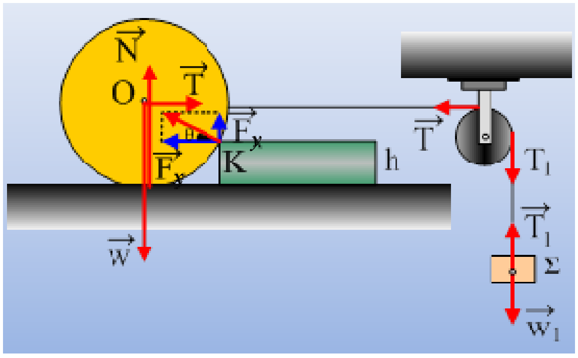
Ο τροχός του διπλανού σχήματος, ακτίνας R και βάρους 100Ν, εμποδίζεται να κινηθεί από εμπόδιο ύψους h= ½ R, όταν δέχεται δύναμη στο κέντρο του Ο, μέσω νήματος, στο άλλο άκρο του οποίου έχουμε κρεμάσει ένα σώμα Σ, μάζας m=4kg.

Δίνεται ότι ο τροχός δεν παρουσιάζει τριβές ούτε με το επίπεδο, ούτε με το εμπόδιο.

i) Να βρεθεί η δύναμη (μέτρο και κατεύθυνση) που ασκείται στον τροχό από το εμπόδιο.

ii) Αν αντικαταστήσουμε το σώμα Σ, με άλλο βαρύτερο, μπορεί ο τροχός να υπερπηδήσει το εμπόδιο;

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα. Αφού η τροχαλία ισορροπεί:

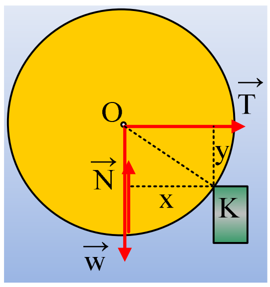
$$\Sigma\tau=0 \text{ ή } T\cdot R - T_1\cdot R=0 \rightarrow T=T_1.$$

Αλλά και το σώμα Σ ισορροπεί, συνεπώς $T_1=mg=40N$

Και ο τροχός ισορροπεί, συνεπώς:

$$\Sigma F=0 \text{ και } \Sigma\tau=0$$

Αλλά το βάρος, η κάθετη αντίδραση Ν και η τάση του νήματος διέρχονται από τον άξονα (κέντρο Ο του τροχού), έχοντας μηδενική ροπή, οπότε και η ροπή της δύναμης που δέχεται ο τροχός από το εμπόδιο, περνάει από το σημείο Ο. Αναλύοντας τη δύναμη αυτή F από το εμπόδιο σε μια οριζόντια και μια κατακόρυφη συνιστώσα έχουμε:



$$\Sigma F_x=0 \rightarrow T-F_x=0 \rightarrow F_x=T=40N \text{ και}$$

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow N+F_y-w=0 \ (1)$$

$$\text{Αλλά } \Sigma\tau_K=0 \rightarrow w\cdot x-N\cdot x+T\cdot y=0 \ (2)$$

Αλλά y=R-h=R- ½ R= ½ R και $x=\sqrt{R^2-y^2}=\sqrt{R^2-\frac{R^2}{4}}=\frac{R\sqrt{3}}{2}$

Και από (2): $100\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}-N\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}+40\cdot\frac{R}{2}=0 \rightarrow N\approx 76{,}9N$ και από (1) $F_y=w-N\approx 23{,}1N$, οπότε:

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=\sqrt{40^2+23{,}1^2}\,N=46{,}2N$$

ii) Ναι, μπορεί να υπερπηδήσει το εμπόδιο, αρκεί να αυξήσουμε το βάρος του σώματος Σ. Πράγματι στην περίπτωση αυτή ο τροχός θα χάσει την επαφή με το έδαφος (N=0) και αρκεί $|\tau_T| \geq |\tau_w|$ ή $T \cdot y \geq w \cdot x$ ή

$$T \geq \frac{w \cdot x}{y} \text{ ή } T \geq 173N$$

Συνεπώς αν το βάρος του σώματος Σ γίνει μεγαλύτερο από 173N, ο τροχός τείνει να υπερπηδήσει το εμπόδιο.

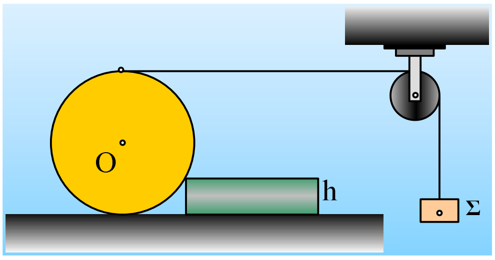
Σχόλιο:

Μέχρι ποιο ύψος μπορεί να έχει το εμπόδιο ώστε ο τροχός να υπερπηδήσει το εμπόδιο;

Το εμπόδιο αρκεί να έχει ύψος μικρότερο της ακτίνας του τροχού, ώστε η ροπή της τάσης του νήματος, ως προς το σημείο Κ, να υπερνικήσει τη ροπή του βάρους. Σε κάθε περίπτωση είτε υπάρχουν είτε όχι τριβές, με εξάσκηση κατάλληλης δύναμης στο κέντρο, ο τροχός θα υπερπηδήσει το εμπόδιο.

Εφαρμογή 2η:

Γύρω από έναν τροχό ακτίνας R και μάζας M=8kg, τυλίγουμε ένα νήμα, το οποίο αφού περαστεί από μια αβαρή τροχαλία, στο άλλο άκρο του κρεμάμε ένα σώμα Σ μάζας m=4kg. Ο τροχός εμποδίζεται να κινηθεί από ένα εμπόδιο ύψους h= ½R. Δίνεται ότι ο τροχός δεν παρουσιάζει τριβές ούτε με το επίπεδο, ούτε με το εμπόδιο.



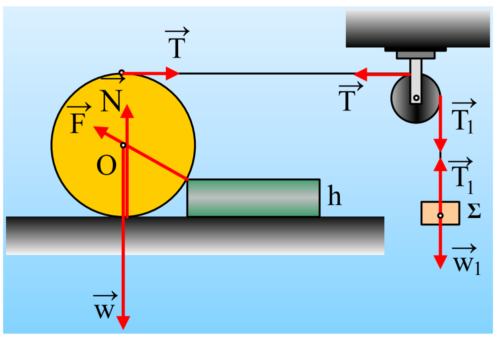
i) Να βρεθεί η δύναμη (μέτρο και κατεύθυνση) που ασκείται στον τροχό από το εμπόδιο, και το οριζόντιο επίπεδο.

ii) Αν αντικαταστήσουμε το σώμα Σ, με άλλο βαρύτερο, μπορεί ο τροχός να υπερπηδήσει το εμπόδιο; Ποια είναι τότε η ελάχιστη τιμή της δύναμης που δέχεται ο τροχός από το εμπόδιο;

Δίνεται $g=10m/s^2$ και η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονά του $I= ½ MR^2$.

Απάντηση:

i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα. Αφού η τροχαλία δεν έχει μάζα (καλύτερα έχει αμελητέα μάζα):



$$\Sigma\tau=0 \text{ ή } T \cdot R - T_1 \cdot R = 0 \rightarrow T=T_1.$$

Τι κάνει ο τροχός; Αφού η δύναμη που δέχεται από το εμπόδιο περνά από το κέντρο Ο (τριβές δεν υπάρχουν), ασκείται ροπή ως προς τον άξονα Ο του τροχού, οπότε ο τροχός περιστρέφεται και το σώμα Σ επιταχύνεται προς τα κάτω. Έτσι έχουμε:

Για το σώμα Σ: $\Sigma F=m \cdot \alpha \rightarrow mg-T_1=m \cdot \alpha$ (1)

Για τον τροχό και θεωρώντας θετική τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού έχουμε:

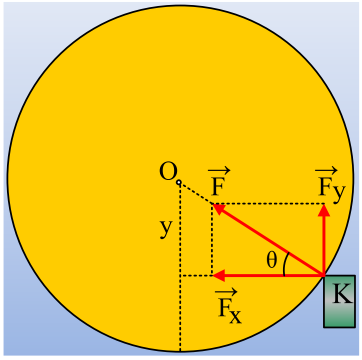
$$\Sigma\tau=I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad T \cdot R= ½ MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T= ½ MR\alpha_{\gamma\omega\nu} \ (2)$$

Ενώ όλα τα σημεία του νήματος κινούνται με την ίδια ταχύτητα άρα $\upsilon_{\gamma\rho\tau\rho}=\upsilon_\Sigma \rightarrow \upsilon=\omega R \rightarrow$

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\omega}{dt}R \rightarrow a = a_{\gamma\omega\nu}R \ (3)$$

Από (1), (2) και (3) παίρνουμε α=5m/s^2 και Τ=20Ν.

Αλλά $\Sigma F_x=0 \rightarrow F_x=T=20N$ και $\Sigma F_y=0 \rightarrow N+F_y-w=0$ (4)



Με βάση το διπλανό σχήμα ημθ=y/R= ½ οπότε συνθ=$\frac{F_x}{F} \rightarrow$

$$F = \frac{F_x}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{20}{\sqrt{3}/2} = \frac{40\sqrt{3}}{3}N \text{ και } F_y=F\cdot\eta\mu\theta = \frac{20\sqrt{3}}{3}N \text{ και από (4)}$$

N≈68,5N.

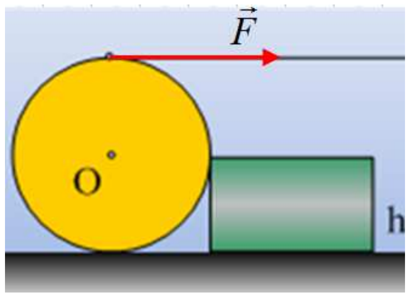
ii) Ναι μπορεί, αρκεί ο τροχός θα χάσει την επαφή με το έδαφος (Ν=0) οπότε F_y=w=80N, αλλά τότε F=160N.

Σχόλιο:

Παρατηρούμε ότι, όταν δεν υπάρχουν τριβές και η δύναμη ασκείται στο ανώτερο σημείο του τροχού και πάλι ο τροχός μπορεί να υπερπηδήσει το εμπόδιο, όπου την ανύψωσή του θα επιφέρει μια συνιστώσα της κάθετης αντίδρασης από το εμπόδιο, αρκεί το ύψος του εμποδίου να είναι μικρότερο από την ακτίνα του τροχού.

Και αν υπάρχουν τριβές;

Εφαρμογή 3η:



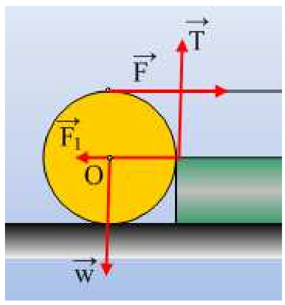
Γύρω από έναν τροχό ακτίνας R και μάζας Μ=8kg, τυλίγουμε ένα νήμα, μέσω του οποίου ασκούμε μια οριζόντια δύναμη F.

Ο τροχός εμποδίζεται να κινηθεί από ένα εμπόδιο ύψους h=R.

i) Αν δεν αναπτύσσεται τριβή μεταξύ τροχού και εμποδίου, μπορεί ο τροχός να υπερπηδήσει το εμπόδιο;

ii) Αν μεταξύ τροχού και εμποδίου ο συντελεστής τριβής είναι μ=0,5, να βρεθεί η ελάχιστη οριζόντια δύναμη F, που πρέπει να ασκηθεί μέσω του νήματος, ώστε ο τροχός να χάσει την επαφή με το οριζόντιο επίπεδο, χωρίς να υπερπηδά το εμπόδιο. Πόση γωνιακή επιτάχυνση αποκτά στην περίπτωση αυτή ο τροχός; Δίνεται R=0,5m και η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονά του I= ½ MR^2.

Απάντηση:



Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα, όπου F η τάση του νήματος και Τ η τριβή από το εμπόδιο, στην περίπτωση που μηδενίζεται η αντίδραση του οριζοντίου επιπέδου.

i) Αν δεν υπάρχουν τριβές, προφανώς δεν υπάρχει κατακόρυφη δύναμη να εξουδετερώσει το βάρος, πολύ περισσότερο να ανασηκώσει τον τροχό. Συνεπώς ο τροχός δεν υπερπηδά το εμπόδιο.

ii) Όταν χάνεται η επαφή με το οριζόντιο επίπεδο, οριακά T=w=Mg=80N.

Συνεπώς $T=\mu\cdot F_1 \rightarrow F_1=T/\mu=160N$.

Αλλά τότε $\Sigma F_x=0 \rightarrow F=F_1=160N$.

Θεωρώντας θετική τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού έχουμε:

$$\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F\cdot R-T\cdot R=\tfrac{1}{2}MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{2(F-T)}{MR}=\frac{2(160-80)}{8\cdot 0,5}rad/s^2=40rad/s^2$$

Σχόλιο:

Παρατηρούμε ότι όταν το εμπόδιο έχει ύψος ίσο με την ακτίνα του τροχού, ανυψωτική δύναμη που μειώνει την κάθετη αντίδραση του οριζοντίου επιπέδου, είναι μόνο η τριβή. Αν δεν υπάρχει, ο τροχός δεν θα ανυψωθεί, αν υπάρχει, τότε όταν αυξάνεται η οριζόντια δύναμη που ασκείται μέσω του νήματος, αυξάνεται και η κάθετη αντίδραση στο Κ και κατά συνέπεια η τριβή. Τριβή η οποία θα είναι μικρότερη από την ασκούμενη δύναμη, αν μ<1, οπότε ο τροχός πριν αρχίσει να ανυψώνεται, θα έχει αρχίσει να περιστρέφεται.

Υλικό Φυσικής-Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης