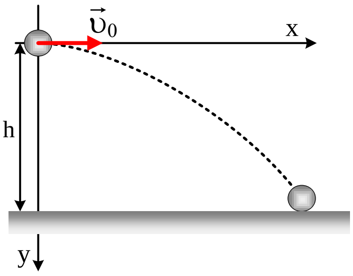
Βολή μες στην φρενίτιδα του ηλεκτρομαγνητισμού.

Σώμα Σ μάζας m = 0,2 kg, βάλλεται οριζόντια από ύψος h με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$. Την στιγμή t_1 που η ταχύτητα του σώματος Σ σχηματίζει με την επιτάχυνση του γωνία θ = 30° ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτική δυναμικής είναι ίσος με –60 J/s. Την στιγμή που η κινητική ενέργεια ισούται με την βαρυτική δυναμική ενέργεια το σώμα Σ απέχει από το έδαφος 70 m. Να βρεθούν:



α. Η χρονική στιγμή t_1

β. Η κινητική ενέργεια του σώματος Σ τη στιγμή της εκτόξευσης

γ. Το βεληνεκές της βολής

δ. Την μεταβολή της κινητικής ενέργειας στο τελευταίο δευτερόλεπτο της κίνησης.

Δίνεται g = 10 m/s^2. Οι αντιστάσεις από τον αέρα θεωρούνται αμελητέες. Επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας θεωρούμε το έδαφος.

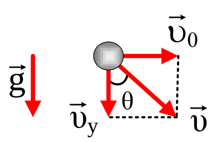
Λύση

α. Η μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας είναι αντίθετη του έργου του βάρους. Άρα ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dU}{dt}=\frac{-dW_w}{dt}=-\frac{w\cdot d\vec{r}}{dt}=-\vec{w}\cdot\vec{\upsilon}=-\vec{w}\cdot(\vec{\upsilon}_x+\vec{\upsilon}_y)=-w\cdot\upsilon_y=-mg\cdot gt_1\Rightarrow t_1=-\frac{\frac{dU}{dt}}{mg^2}\Rightarrow t_1=-\frac{-60}{20}s\Rightarrow$$

t_1 = 3 s.

β. Η επιτάχυνση του σώματος Σ, είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας της οποίας το διάνυσμα ταυτίζεται με την συνιστώσα της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_y$. Άρα γνωρίζουμε την γωνία μεταξύ $\vec{\upsilon}$ και $\vec{\upsilon}_y$.



Η συνιστώσα της ταχύτητας τη χρονική στιγμή t_1 έχει μέτρο: $\upsilon_y = gt_1 \Rightarrow \upsilon_y = 10\cdot 3$ m/s $\Rightarrow$ **υ_y = 30 m/s**

Συνεπώς: $\varepsilon\varphi\theta=\frac{\upsilon_0}{\upsilon_y}\Rightarrow\upsilon_0=\varepsilon\varphi\theta\cdot\upsilon_y\Rightarrow\upsilon_0=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 30\frac{m}{s}\Rightarrow\boldsymbol{\upsilon_0=10\sqrt{3}\ m/s}$.

Η κινητική ενέργειας του Σ τη στιγμή της εκτόξευσης είναι: $K_0=\frac{1}{2}m\upsilon_0^2\Rightarrow K_0=\frac{1}{2}\cdot 0,2\cdot 300\,J\Rightarrow$ **K_0 = 30 J**.

γ. Όταν ισχύει U = K το ύψος είναι h′ = 70 m, επομένως θα έχουμε:

$U = mgh' \Rightarrow U = 0{,}2\cdot10\cdot70\ J \Rightarrow$ **U = 140 J**.

Εφαρμόζω την ΑΔΜΕ από την στιγμή της εκτόξευσης μέχρι που η κινητική και δυναμική ενέργεια γίνονται ίσες.

$E_{M(0)} = E_M \Rightarrow K_0 + U_0 = K + U \Rightarrow U_0 = 2U - K_0 \Rightarrow U_0 = 280\ J - 30\ J \Rightarrow \mathbf{U_0 = 250\ J}$.

Το ύψος από το οποίο γίνεται η βολή είναι: $U_0 = mgh \Rightarrow h = \frac{U_0}{mg} \Rightarrow h = \frac{250}{2} m \Rightarrow$ **h = 125 m**.

Το σώμα φτάνει στο έδαφος όταν $y = h \Rightarrow \frac{1}{2}gt_2^2 = h \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2\cdot125}{10}}\, s \Rightarrow \mathbf{t_2 = 5\ s}$.

Το βεληνεκές της βολής είναι: $s = \upsilon_0.t_2 \Rightarrow s = 10\sqrt{3}\cdot5\,m \Rightarrow \mathbf{s = 50\sqrt{3}\,m}$.

δ. Η κινητική ενέργεια την στιγμή που το σώμα φτάνει στο έδαφος μπορεί να βρεθεί από την ΑΔΜΕ

$E_{M(0)} = E_M \Rightarrow K_0 + U_0 = K_4 + 0 \Rightarrow K_4 = 250\ J + 30\ J \Rightarrow \mathbf{K_4 = 280\ J}$.

Την στιγμή $t = t_2 - 1\ s = 4\ s$, η ταχύτητα του Σ έχει μέτρο

$\upsilon_3 = \sqrt{\upsilon_0^2 + \upsilon_{y,t}^2} = \sqrt{\upsilon_0^2 + (gt)^2} = \sqrt{300 + 1600}\ m/s \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_3 = 10\sqrt{19}\ m/s}$.

Και η κινητική ενέργεια αυτή τη στιγμή είναι: $K_3 = \frac{1}{2}m\upsilon_3^2 = \frac{1}{2}\cdot0{,}2\cdot1900\,J \Rightarrow K_3 = 190\ J$.

Άρα $\Delta K = K_4 - K_3 = 280\ J - 190\ J \Rightarrow \mathbf{\Delta K = 90\ J}$.

Σημείωση: Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούσαμε να φτάσουμε βρίσκοντας το πόσο απέχει από το έδαφος την χρονική στιγμή t: $h_3 = h - y_3 = h - \frac{1}{2}gt^3 = 125\,m - \frac{1}{2}10\cdot16\,m \Rightarrow h_3 = 45\ m$.

Εκείνη τη στιγμή η δυναμική ενέργεια είναι: $U_3 = mgh_3 \Rightarrow U_3 = 90\ J$ και $U_4 = 0$ (στο έδαφος)

Επειδή η μηχανική ενέργεια διατηρείται ισχύει:

$\Delta K = -\Delta U = -(U_4 - U_3) \Rightarrow \mathbf{\Delta K = 90\ J}$.