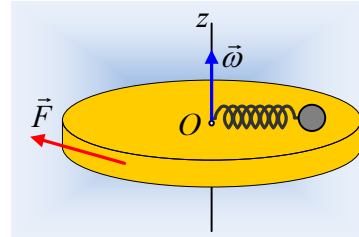


Ένα σύστημα σωμάτων σε περιπέτειες...

Μια οριζόντια κυκλική πλατφόρμα μάζας $M=20\text{kg}$ και ακτίνας $R=2\text{m}$, στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα z , χωρίς τριβές, ο οποίος περνά από το κέντρο της O με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega=2\text{rad/s}$. Πάνω στην πλατφόρμα είναι τοποθετημένη μια μικρή σφαίρα (αμελητέων διαστάσεων) και μάζας $m=2\text{kg}$, η οποία είναι δεμένη στο ένα άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=100\text{N/m}$ και φυσικού μήκους $l_0=92\text{cm}$, το άλλο άκρο του οποίου δένεται στον άξονα περιστροφής. Μεταξύ σφαίρας και πλατφόρμας δεν αναπτύσσονται τριβές, ενώ η σφαίρα στρέφεται μαζί με την πλατφόρμα, χωρίς να μεταβάλλεται η θέση της ως προς αυτήν.



i) Το μήκος του ελατηρίου είναι:

α) $l < l_0$, β) $l = l_0$, γ) $l > l_0$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Να υπολογιστεί η στροφορμή κάθε σώματος (πλατφόρμα-σφαίρα), καθώς και η στροφορμή του συστήματος κατά (ως προς) τον άξονα z .

Σε μια στιγμή $t_0=0$, ασκείται εφαπτομενικά στην πλατφόρμα μια οριζόντια, σταθερού μέτρου δύναμη $F=10\text{N}$, όπως στο παραπάνω σχήμα.

iii) Να βρεθούν οι ρυθμοί μεταβολής της στροφορμής κατά (ως προς) τον άξονα z :

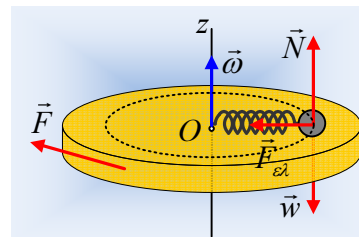
α) του συστήματος, β) της σφαίρας, γ) της πλατφόρμας.

iv) Να υπολογιστεί η στροφορμή κάθε σώματος (πλατφόρμα-σφαίρα), καθώς και η στροφορμή του συστήματος κατά (ως προς) τον άξονα z , τη στιγμή $t_1=5\text{s}$.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της πλατφόρμας, ως προς τον άξονά της $I = \frac{1}{2} MR^2$.

Απάντηση:

i) Η σφαίρα στρέφεται μαζί με την πλατφόρμα διαγράφοντας έναν κύκλο ακτίνας r με κέντρο το κέντρο O της πλατφόρμας. Σχεδιάζοντας τις δυνάμεις που ασκούνται στην σφαίρα, εκτός του βάρους και της κάθετης αντίδρασης του επιπέδου N , πρέπει να ασκείται και δύναμη από το ελατήριο, η $F_{ελ}$, η οποία να «παιζει το ρόλο» της κεντρομόλου.



Αλλά για να ασκείται δύναμη με φορά όπως στο σχήμα, το ελατήριο θα πρέπει να έχει επιμηκυνθεί, συνεπώς $l > l_0$. Σωστό το γ).

ii) Έστω l το μήκος του ελατηρίου, οπότε η σφαίρα διαγράφει κυκλική τροχιά ακτίνας $r=l$ με ταχύτητα $v=\omega r=\omega l$ και η δύναμη του ελατηρίου λειτουργεί ως κεντρομόλος, οπότε:

$$F_{ελ} = m \frac{v^2}{r} \rightarrow$$

$$k\Delta\ell = m \frac{\omega^2 \ell^2}{\ell} \rightarrow k(\ell - \ell_0) = m\omega^2 \ell \rightarrow k\ell - k\ell_0 = m\omega^2 \ell \rightarrow$$

$$\ell = \frac{k\ell_0}{k - m\omega^2} = \frac{100 \cdot 0,92}{100 - 2 \cdot 2^2} m = 1m$$

Επομένως η σφαίρα εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας $r=1m$ με ταχύτητα $v=\omega r=2m/s$, έχοντας στροφορμή κατά τον άξονα με φορά προς τα πάνω και μέτρο:

$$L_\sigma = mvr = 2 \cdot 2 \cdot 1 kgm^2/s = 4kgm^2/s$$

Εξάλλου και η πλατφόρμα έχει στροφορμή κατακόρυφη, ίδιας φοράς με μέτρο:

$$L_\pi = I\omega = \frac{1}{2} MR^2 \omega = \frac{1}{2} 20 \cdot 2^2 \cdot 2 kgm^2/s = 80kgm^2/s$$

Αλλά τότε το σύστημα πλατφόρμα-σφαίρα έχει συνολική στροφορμή:

$$\vec{L}_{o\lambda} = \vec{L}_\pi + \vec{L}_\sigma \rightarrow L = L_\pi + L_\sigma = (80+4) kgm^2/s = 84 kgm^2/s.$$

Κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω, όπως στο σχήμα.

iii) Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι τα βάρη, η δύναμη από τον άξονα και η οριζόντια δύναμη F . Ροπή ως προς τον άξονα, έχει μόνο η δύναμη F , οπότε, θεωρώντας την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική έχουμε:

$$\frac{dL_{o\lambda}}{dt} = \Sigma \tau_{εξ} \rightarrow$$

$$\frac{dL_{o\lambda}}{dt} = -FR = -10 \cdot 2 kg \cdot m^2 / s^2 = -20 kg \cdot m^2 / s^2$$

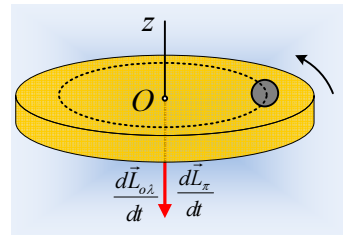
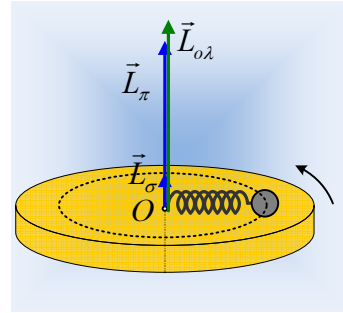
Όπου η αρνητική τιμή σημαίνει ότι το διάνυσμα $\frac{d\vec{L}_{o\lambda}}{dt}$ έχει φορά προς τα κάτω, όπως στο διπλανό σχήμα.

Για την πλατφόρμα έχουμε:

$$\frac{dL_\pi}{dt} = \Sigma \tau \rightarrow \frac{dL_\pi}{dt} = \tau_w + \tau_{F_{αξ}} + \tau_{N'} + \tau_F$$

Όπου οι ροπές, του βάρους, της δύναμης από τον άξονα και της αντίδρασης της N (που έχουμε σχεδιάσει στο πρώτο σχήμα) είναι μηδενικές, άρα:

$$\frac{dL_\pi}{dt} = \tau_F = -FR = -20 kg \cdot m^2 / s^2.$$



Ενώ στη σφαίρα δεν ασκείται κάποια δύναμη που να έχει ροπή ως προς τον άξονα z, συνεπώς:

$$\frac{dL_\sigma}{dt} = \Sigma\tau = 0$$

Πράγμα άλλωστε αναμενόμενο, αφού το (διανυσματικό) άθροισμα των δύο ρυθμών για πλατφόρμα-σφαίρα, θα πρέπει να είναι ίσο με τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος!

- iv) Οι παραπάνω ρυθμοί μεταβολής της στροφορμής παραμένουν σταθεροί, οπότε από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

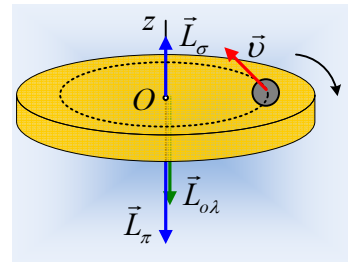
$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau \rightarrow \frac{L - L_0}{t - t_0} = \Sigma\tau \rightarrow L = L_0 + \Sigma\tau \cdot t$$

Οπότε έχουμε αναλυτικά για τα σώματα:

Σφαίρα: $L_\sigma = L_0 + \Sigma\tau \cdot t = L_0 + 0 \cdot t = L_0 = 4\text{kgm}^2/\text{s}$

Πλατφόρμα: $L_\pi = L_0 + \Sigma\tau \cdot t = L_0 - FR \cdot t = 80\text{kgm}^2/\text{s} - 20 \cdot 5\text{kgm}^2/\text{s} = -20\text{kgm}^2/\text{s}$

Σύστημα: $L_{ολ} = L_0 + \Sigma\tau_{εξ} \cdot t = L_{ολ} - FR \cdot t = 84\text{kgm}^2/\text{s} - 20 \cdot 5\text{kgm}^2/\text{s} = -16\text{kgm}^2/\text{s}$



Σχόλιο:

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό, ότι η άσκηση της δύναμης F, έχει σαν αποτέλεσμα τη μεταβολή της στροφορμής της πλατφόρμας, χωρίς να αλλάζει κάτι στην κίνηση της σφαίρας, η οποία συνεχίζει να κινείται όπως και αρχικά με ταχύτητα μέτρου $v=2\text{m/s}$. Αντίθετα η πλατφόρμα τη στιγμή $t=5\text{s}$, στρέφεται με αντίθετη πια φορά, αφού η ροπή τη δύναμης προκάλεσε αρχικά επιβράδυνσή της και στη συνέχεια επιτάχυνσής της με φορά ίδια με τη φορά της ροπής, δηλαδή προς τα κάτω ή αν προτιμάται η πλατφόρμα τελικά στρέφεται με τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.

dmargaris@gmail.com