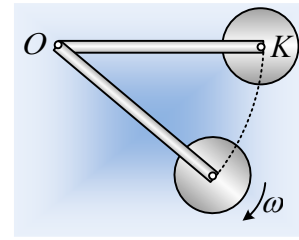


Η κινητική ενέργεια σε ένα σύστημα.

Τρεις ...παρόμοιες ερωτήσεις.

- 1) Το άκρο K μιας ομογενούς ράβδου, μήκους $\ell=4R$ και μάζας $M=3m$, έχει καρφωθεί στο κέντρο ενός δίσκου, μάζας m και ακτίνας R , δημιουργώντας ένα στερεό s, το οποίο μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνάει από το άκρο O της ράβδου. Αφήνουμε το στερεό να περιστραφεί από μια θέση που η ράβδος είναι οριζόντια και μετά από λίγο έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα ω . Για τη θέση αυτή:



- i) Ποιες από τις παρακάτω σχέσεις που δίνουν κινητική ενέργεια είναι σωστές και ποιες λάθος:
- α) $K_p = \frac{1}{2} M v_{cm}^2$, β) $K_p = \frac{1}{2} I_{1,O} \cdot \omega^2$, γ) $K_p = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{1,cm} \cdot \omega^2$.
- δ) $K_\delta = \frac{1}{2} m v_K^2$, ε) $K_\delta = \frac{1}{2} m v_K^2 + \frac{1}{2} I_{2,cm} \cdot \omega^2$, στ) $K_\delta = \frac{1}{2} I_{2,O} \cdot \omega^2$.
- ii) Ο λόγος της κινητικής ενέργειας του δίσκου προς την κινητική ενέργεια του στερεού K_δ/K_s είναι ίσος με:

α) 16/35, β) 27/55, γ) 33/65.

Δίνονται οι ροπές αδράνειας των στερεών ως προς κάθετους άξονες που διέρχονται από τα κέντρα μάζας, για τη ράβδο $I_1 = M\ell^2/12$ και για το δίσκο $I_2 = \frac{1}{2} mR^2$.

Απάντηση:

- i) Η ράβδος εκτελεί στροφική κίνηση γύρω από το άκρο της O, συνεπώς η κινητική της ενέργεια δεν μπορεί να υπολογίζεται από την εξίσωση $K_p = \frac{1}{2} M v_{cm}^2$ (α: Λάθος) αφού η εξίσωση ισχύει μόνο για μεταφορική κίνηση. Έτσι η κινητική ενέργεια δίνεται από την εξίσωση:

$$K_p = \frac{1}{2} I_o \omega^2$$

Και η β) πρόταση είναι σωστή.

Αλλά η παραπάνω εξίσωση γράφεται και:

$$K_p = \frac{1}{2} I_o \omega^2 = \frac{1}{2} (I_{cm} + M d^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M (d\omega)^2$$

Αλλά $v_{cm} = \omega \cdot d$, όπου $d = \frac{\ell}{2}$ και η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$K_p = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

Συνεπώς και η γ) πρόταση είναι σωστή, αντιμετωπίζοντας την κίνηση της ράβδου ως σύνθετη, μια μεταφορική με ταχύτητα v_{cm} και μια στροφική γύρω από οριζόντιο άξονα που

περνά από το μέσον της (το κέντρο μάζας).

Με την ίδια συλλογιστική και για το δίσκο έχουμε:

δ) Λάθος, ε) Σωστή και στ) Σωστή.

ii) Με βάση τα παραπάνω η κινητική ενέργεια του δίσκου είναι ίση:

$$K_{\delta} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = \frac{1}{2} m \cdot (\omega \ell)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m \cdot R^2 \omega^2 \rightarrow$$

$$K_{\delta} = \frac{1}{2} m \cdot 16 R^2 \omega^2 + \frac{1}{4} m \cdot R^2 \omega^2 = 8,25 m R^2 \omega^2$$

Ενώ για τη ράβδο:

$$K_{\rho} = \frac{1}{2} I_o \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} M \ell^2 + M \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{3} M \ell^2 \omega^2 = \frac{1}{6} 3m \cdot 16 R^2 \omega^2 = 8 m R^2 \omega^2$$

Συνεπώς η κινητική ενέργεια του στερεού s είναι:

$$K_s = K_{\rho} + K_{\delta} = 16,25 m R^2 \omega^2$$

Και ο λόγος:

$$\frac{K_{\delta}}{K_s} = \frac{8,25 m R^2 \omega^2}{16,25 m R^2 \omega^2} = \frac{33}{65}$$

Σωστό το γ).

2) Στην προηγούμενη διάταξη, αντί να έχουμε καρφώσει τη ράβδο στο δίσκο, έχουμε άρθρωση, με αποτέλεσμα ο δίσκος να έχει τη δυνατότητα περιστροφής γύρω από το κέντρο του K. Επαναλαμβάνουμε το πείραμα. Στη θέση που η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της ράβδου είναι ω :

i) Η κινητική ενέργεια του δίσκου δίνεται από την εξίσωση:

$$\alpha) K_{\delta} = \frac{1}{2} m v_K^2, \quad \beta) K_{\delta} = \frac{1}{2} m v_K^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \cdot \omega^2, \quad \gamma) K_{\delta} = \frac{1}{2} I_{2,O} \cdot \omega^2.$$

ii) Ο λόγος της κινητικής ενέργειας του δίσκου, προς την κινητική ενέργεια της ράβδου

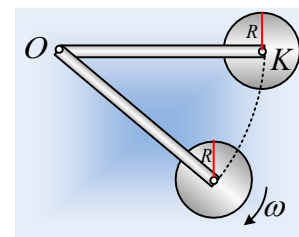
$$\left(\frac{K_{\delta}}{K_{\rho}} \right), \text{ είναι ίσος με:}$$

$$\alpha) \frac{1}{2}, \quad \beta) 1, \quad \gamma) 2$$

Απάντηση:

i) Τώρα ο δίσκος δεν πρόκειται να περιστραφεί, αφού δεν δέχεται κάποια ροπή που να τον περιστρέψει, οπότε εκτελεί μεταφορική κίνηση με ταχύτητα $v_{\delta} = v_K = v_{cm} = \omega \ell = 4\omega R$.

Συνεπώς η κινητική του ενέργεια παρέχεται από την εξίσωση $K_{\delta} = \frac{1}{2} m v_K^2$ και σωστό είναι το α).

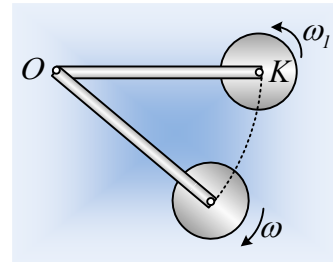


ii) Έχουμε $K_{\delta} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 = \frac{1}{2} m \cdot (4\omega R)^2 = 8mR^2 \omega^2$, ενώ η ράβδος θα έχει την ίδια με προη-

γυμνώς κινητική ενέργεια $K_{\rho} = \frac{1}{2} I_o \omega^2 = 8mR^2 \omega^2$.

Συνεπώς ο λόγος των δύο κινητικών ενεργειών είναι 1 και σωστό το β).

- 3) Έχοντας το σύστημα ράβδος- δίσκος αρθρωμένο όπως και προηγουμένως, φέρνουμε σε οριζόντια θέση τη ράβδο, θέτουμε σε περιστροφή το δίσκο, όπως στο σχήμα με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_1 = 2\omega$ και στη συνέχεια το αφήνουμε να κινηθεί. Στη θέση που η ράβδος αποκτά γωνιακή ταχύτητα ω , η κινητική ενέργεια του δίσκου έχει τιμή:



α) $K_{\delta} = 8,25mR^2 \omega^2$ β) $K_{\delta} = 9mR^2 \omega^2$ γ) $K_{\delta} = 9,25mR^2 \omega^2$

Απάντηση:

Ο δίσκος θα εκτελεί σύνθετη κίνηση με ταχύτητα κέντρου μάζας $v_{cm} = v_K = \omega \cdot l$, ενώ θα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_1 , χωρίς αυτή να έχει μεταβληθεί, αφού οι δυνάμεις που δέχεται (δύναμη από τον άξονα και βάρος) έχουν μηδενικές ροπές ως προς τον άξονά του. Αλλά τότε:

$$K_{\delta} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega_1^2 = \frac{1}{2} m \cdot (\omega l)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m \cdot R^2 (2\omega)^2 \rightarrow$$

$$K_{\delta} = \frac{1}{2} m \cdot 16R^2 \omega^2 + \frac{1}{4} m \cdot R^2 \cdot 4\omega^2 = 9mR^2 \omega^2$$

Σωστό το β).

dmargaris@gmail.com