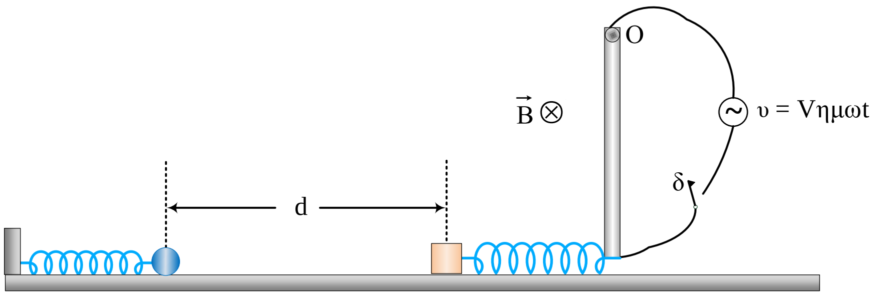
Ράβδος με …. ακλόνητες απόψεις!!!



Ένα σώμα μάζας $m_{ολ}$ = 0,3 kg είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζοντίου ελατηρίου το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο στο άκρο κατακόρυφης ράβδου μήκους ℓ = 2 m. Η ράβδος είναι αναρτημένη σε σταθερό σημείο Ο (που μπορεί να κινείται γύρω από αυτό χωρίς τριβές) και ισορροπεί κατακόρυφα. Η ράβδος που έχει αντίσταση R = 50 Ω και βάρος w = 6 N, είναι αγώγιμη και συνδεδεμένη μέσω διακόπτη με πηγή εναλλασσόμενης τάσης της μορφής υ = Vημωt. διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα. Το όλο σύστημα βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο έντασης B = 2 T. Μία έκρηξη προκαλεί διάσπαση του σώματος Σ σε δύο κομμάτια το οποίο ένα μένει δεμένο στο ελατήριο (το $Σ_1$) και κάνει οριζόντια ταλάντωση της μορφής x = 0,2ημ20t S.I. Ταυτόχρονα με την έκρηξη κλείνουμε το διακόπτη και η ράβδος διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα. Η ενέργεια που απελευθερώθηκε από την έκρηξη είναι κατά 50% μεγαλύτερη από την ενέργεια της ταλάντωσης σώματος $Σ_1$.

Να βρεθούν:

α. Η σταθερά k του ελατηρίου που είναι δεμένο το $Σ_1$

β. Το ποσό θερμότητας που εκλύεται από την ράβδο σε μία περίοδο της ταλάντωσης του $Σ_1$

γ. Τα στοιχεία κανονικής λειτουργείας μιας συσκευής που συμπεριφέρεται ως ωμικός αντιστάτης αντίστασης R_1 = 5 Ω, που μπορούμε να συνδέσουμε με την παραπάνω εναλλασσόμενη τάση, ώστε να λειτουργεί κανονικά.

Το $Σ_2$ μετά την έκρηξη αφού διανύσει απόσταση d, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με σώμα $Σ_3$ μάζας m_3 = 0,6 kg, που είναι δεμένο σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς k_3. Σε χρονικό διάστημα $Δt_2$ = 13π/30 s, μετά την έναρξη της ταλάντωσης του $Σ_3$ η κινητική του ενέργεια είναι τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης για $5^η$ φορά, ενώ την ίδια χρονική στιγμή το $Σ_2$ συγκρούεται με το $Σ_1$ το οποίο περνά από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο αντίθετα σε σχέση με το $Σ_2$

δ. Ποια η μέγιστη δύναμη που δέχεται το $Σ_3$ κατά την διάρκεια της ταλάντωσης του;

ε. Πόσο διάστημα έχει διανύσει το $Σ_1$ από την στιγμή της έκρηξης μέχρι να συγκρουστεί με το $Σ_2$

στ. Ποια το μέτρο της μέγιστης δύναμης που δέχεται η ράβδος από τον άξονά της;

Δίνεται ότι το ελατήριο και τα σώματα $Σ_1$, $Σ_2$ (το δεύτερο κομμάτι από το Σ δεν είναι αγώγιμα και δεν επηρεάζονται από το μαγνητικό πεδίο. Η χρονική διάρκεια των κρούσεων θεωρείται αμελητέα.

Όλη η ενέργεια της έκρηξης μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια των σωμάτων.

Λύση

α. Κατά την διάρκεια της έκρηξης ισχύει η Α.Δ.Ο.

Η ταχύτητα $\vec{υ}_1$ που αποκτά το $Σ_1$ εξαιτίας της έκρηξης είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης.

Από την εξίσωση x = 0,2ημ20t S.I. προκύπτει ότι Α = 0,2 m και ω = 20 rad/s, συνεπώς

$υ_1 = υ_{max} = ωA = 4$ m/s.

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{αρχ} \Rightarrow 0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow m_1υ_1 = m_2υ_2$ (1).

Η ενέργεια που απελευθερώνεται από την έκρηξη είναι $E_{εκρ} = K_1 + K_2$ και αφού η $E_{εκρ}$ είναι 50% μεγαλύτερη από την ενέργεια της ταλάντωσης ισχύει $E_{εκρ} = 1,5E \Rightarrow \frac{1}{2}m_1υ_1^2 + \frac{1}{2}m_2υ_2^2 = 1,5\frac{1}{2}m_1υ_1^2 \Rightarrow \frac{1}{2}m_1υ_1^2 = m_2υ_2^2$ (2).

Διαιρώ τις (1) και (2) και προκύπτει: $\frac{1}{2}υ_1 = υ_2 \Rightarrow$ $\mathbf{υ_2 = 2}$ **m/s**.

Από την (1) έχουμε: $m_1υ_1 = m_2υ_2 = (m_{ολ} - m_1)υ_2 \Rightarrow m_1 = \frac{m_{ολ}υ_2}{υ_1 + υ_2} \Rightarrow m_1 = \frac{0,3 \cdot 2}{4+2}\text{kg} \Rightarrow$ $\mathbf{m_1 = 0,1}$ **kg**.

Άρα $k = D = m_1ω^2 \Rightarrow$ **k = 40 N/m**.

β. Η ράβδος ισορροπεί άρα κάθε στιγμή δέχεται αντίρροπες ροπές από τη δύναμη που ασκεί το ελατήριο και τη δύναμη που ασκεί το μαγνητικό πεδίο στη ράβδο (η ροπή του βάρους της είναι μηδέν).

$$Στ = 0 \Rightarrow τ_{F_{ελ}} + τ_{F_L} = 0 \Rightarrow F_{ελ}\ell = F_L\frac{\ell}{2} \Rightarrow kx = \frac{Bi\ell}{2} \Rightarrow i = \frac{2kAημωt}{B\ell} \Rightarrow i = \frac{2 \cdot 40 \cdot 0,2ημ20t}{2 \cdot 2}\text{S.I.} \Rightarrow (1)$$

i = 4ημ20t S.I.

Το ποσό θερμότητας ου εκλύεται από την ράβδο σε μία περίοδο της ταλάντωσης του $Σ_1$ είναι:

$$Q = I_{εν}^2RT = \frac{I^2}{2}R\frac{2π}{ω} \Rightarrow Q = \frac{16 \cdot 50 \cdot π}{20}\text{J} \Rightarrow \mathbf{Q = 40π\ J}.$$

γ. Η εξίσωση της εναλλασσόμενης τάσης είναι:

$\upsilon = iR \Rightarrow \upsilon = (4\eta\mu 20t)\cdot 50$ S.I. $\Rightarrow$ **$\upsilon = 200\eta\mu 20t$ S.I.**

Η συσκευή για να λειτουργεί κανονικά θα πρέπει να έχει τάση κανονικής λειτουργείας ίση με την ενεργό τάση του εναλλασσόμενου ρεύματος. Άρα:

$V_\kappa = V_{\varepsilon\nu} = \frac{V}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mathbf{V_\kappa = 100\sqrt{2}\,V}$ και η ισχύς της $P_\kappa = \frac{V_\kappa^2}{R_1} \Rightarrow P_\kappa = \frac{(100\sqrt{2})^2}{5} W \Rightarrow P_\kappa = 4000W \Rightarrow$ **$P_\kappa = 4$ kW**

δ. Η κρούση των δύο σωμάτων είναι κεντρική και ελαστική άρα ισχύει:

$$\upsilon_2' = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3}\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{0,2-0,6}{0,2+0,6}2\frac{m}{s} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_2' = -1\frac{m}{s}}.$$

Δηλαδή έχουμε ταχύτητα μέτρου 1 m/s και αντιστροφή φοράς.

Για το Σ_3 έχουμε: $\upsilon_3' = \frac{2m_2\upsilon_2}{m_2+m_3} \Rightarrow \upsilon_3' = \frac{2\cdot 0,2\cdot 2}{0,2+0,6}\frac{m}{s} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_3' = 1\frac{m}{s}}$

Θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα αριστερά και Δt το χρονικό διάστημα που ταλαντώνεται το Σ_3 η εξίσωση της απομάκρυνσης του είναι: $x_3 = A_3\eta\mu\omega_3\Delta t$.

Η κινητική ενέργεια γίνεται τριπλάσια της δυναμικής όταν:

$$K = 3U \Rightarrow E = 4U \Rightarrow \frac{1}{2}k_3A_3^2 = 4\frac{1}{2}k_3x_3^2 \Rightarrow x_3 = \pm\frac{A_3}{2} \Rightarrow A_3\eta\mu\omega_3\Delta t = \pm\frac{A_3}{2} \Rightarrow \eta\mu\omega_3\Delta t = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\omega_3\Delta t = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow \Delta t = \frac{6\kappa\pi \pm \pi}{6\omega_3} \text{ S.I.}$$

Για 5η φορά προκύπτει $\Delta t_2 = \frac{13\pi}{6\omega_3}\text{S.I.} \Rightarrow \frac{13\pi}{30}\text{S.I.} = \frac{13\pi}{6\omega_3} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_3 = 5\frac{rad}{s}}$.

Έτσι λοιπόν $k_3 = D_3 = m_3\omega_3^2 \Rightarrow$ **$k_3 = 15$ N/m**, και $\upsilon_3' = \upsilon_{3,max} = \omega_3A_3 \Rightarrow$ **$A_3 = 0,2$ m.**

Η μέγιστη δύναμη που δέχεται το Σ_3 κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του είναι: $F_{max} = k_3A_3 \Rightarrow$ **$F_{max} = 3$ N**.

ε. Η Θ.Ι. του Σ_1 και η Θ.Ι. του Σ_2, απέχουν απόσταση $d = |\upsilon_2'|\Delta t_2 \Rightarrow d = \frac{13\pi}{30}m$.

Για να μεταβεί το Σ_2 από το ένα άκρο στο άλλο της απόστασης d, αρχικά χρειάστηκε χρόνο Δt_1. Ισχύει:

$$d = \upsilon_2\Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{d}{\upsilon_2} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta t_1 = \frac{13\pi}{60}s}$$

Άρα ο συνολικός χρόνος ταλάντωσης του Σ_1 από τη στιγμή της έκρηξης μέχρι να συγκρουστεί με το Σ_2 είναι:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t = \frac{39\pi}{60}s \Rightarrow \mathbf{\Delta t = \frac{13\pi}{20}s}$$

Η περίοδος της ταλάντωσης του Σ_1 είναι $T = 2\pi/\omega \Rightarrow T = \pi/10$ s. Συνεπώς:

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\frac{13\pi}{20}s}{\frac{\pi}{10}s} \Rightarrow \Delta t = 6,5T$$

Ένα ταλαντούμενο σώμα σε κάθε περίοδο διανύει διάστημα 4A και σε κάθε T/2 διάστημα 2A. Έτσι έχουμε:

$s = 6,5 \cdot 4A \Rightarrow$ **s = 5,2 m**.

στ. Μέγιστη δύναμη δέχεται η ράβδος από τον άξονα της όταν οι άλλες δυνάμεις πάρουν την μέγιστη τους τιμή. Έχουμε: $F_{\varepsilon\lambda,max} = kA \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda,max} = 40 \cdot 0,2$ N $\Rightarrow$ $\mathbf{F_{\varepsilon\lambda,max} = 8}$ **N**.

Από την (1) όμως έχουμε: $F_L = 2F_{\varepsilon\lambda}$ άρα και $F_{L,max} = 2F_{\varepsilon\lambda,max} \Rightarrow$ $\mathbf{F_{L,max} = 16}$ **N**.

Άρα $\Sigma\vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow F_x = F_{L,max} - F_{\varepsilon\lambda,max} \Rightarrow \mathbf{F_x = 8\,N}$

$\Sigma\vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow F_y = w \Rightarrow \mathbf{F_y = 6\,N}$

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow$ **F = 10 N**.