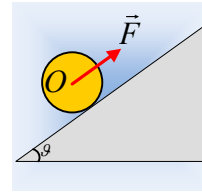


Ένας τροχός σε κεκλιμένο επίπεδο

Ένας τροχός μάζας 8kg ισορροπεί σε κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως θ , με την επίδραση δύναμης F , η οποία μέσω κατάλληλου μηχανισμού, ασκείται στο κέντρο του O , όπως στο σχήμα.

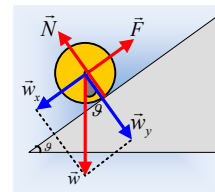


- i) Να υπολογιστούν οι δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό.
- ii) Σε μια στιγμή ($t_0=0$) αυξάνουμε το μέτρο της δύναμης στην τιμή $F_1=60N$. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του κέντρου O του τροχού τη στιγμή $t_1=4s$.
- iii) Τη στιγμή t_1 , το μέτρο της δύναμης αυξάνεται στην τιμή $F_2=160N$.
 - α) Να γίνει η γραφική παράσταση της ταχύτητας v_{cm} του κέντρου O , σε συνάρτηση με το χρόνο από 0-6s.
 - β) Να υπολογιστούν τα έργα της δύναμης και της τριβής, από t_0 μέχρι τη στιγμή $t_2=6s$.
 - γ) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής του τροχού, τη στιγμή t_2 .

Δίνονται: Για τον τροχό $I = \frac{1}{2} MR^2$ ως προς οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδό του που περνά από το κέντρο του O , $\eta\mu\theta=0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\theta=0,8$, $g=10m/s^2$, ενώ για τους συντελεστές τριβής μεταξύ τροχού και επιπέδου $\mu=\mu_s=0,5$.

Απάντηση:

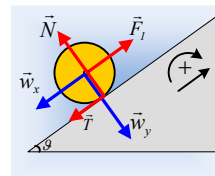
- i) Ο τροχός ισορροπεί με την επίδραση τριών δυνάμεων. Της δύναμης \vec{F} , του βάρους \vec{w} και της δύναμης από το επίπεδο. Αλλά αφού το βάρος και η F περνούν από το O , από το ίδιο σημείο θα διέρχεται και η δύναμη από το επίπεδο, αφού ως προς το O θα ισχύει $\Sigma\tau=0$ (ισορροπία του τροχού). Έτσι οι δυνάμεις είναι αυτές του σχήματος, χωρίς να κάννει την εμφάνισή της δύναμη τριβής. Από την ισορροπία του τροχού παίρνουμε:



$$\Sigma F_x=0 \rightarrow F=w_x=Mg\cdot\eta\mu\theta=8\cdot 10\cdot 0,6N=48N$$

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow N=w_y=Mg\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=8\cdot 10\cdot 0,8N=64N$$

- ii) Μόλις αυξήσουμε το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F , ο τροχός τείνει να κινηθεί προς τα πάνω, οπότε θα κάνει την εμφάνισή της δύναμη τριβής, όπως στο σχήμα, η οποία αφενός τείνει να αντισταθεί στην ολίσθηση του τροχού, αφετέρου η ροπή της θα επιταχύνει περιστροφικά τον τροχό. Εφαρμόζοντας το 2^ο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:



$$\text{Μεταφορική κίνηση: } \Sigma F_x=M\cdot a_{cm} \rightarrow F_1-Mg\cdot\eta\mu\theta-T_1=M\cdot a_{cm,1} \quad (1)$$

$$\text{Στροφική κίνηση: } \Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_1\cdot R=\frac{1}{2} MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_1=\frac{1}{2} MR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu,1} \quad (2)$$

Τι κίνηση κάνει ο τροχός; Υποθέτουμε ότι ο τροχός κυλιέται (χωρίς να ολισθαίνει), οπότε θα ισχύει και $\alpha_{cm,1}=\alpha_{\gamma\omega\nu,1}R$, οπότε με πρόσθεση των (1) και (2) παίρνουμε:

$$F_1 - Mg \cdot \eta \mu \theta = \frac{3}{2} M a_{cm,1} \rightarrow (3)$$

$$a_{cm,1} = \frac{2(F_1 - Mg \cdot \eta \mu \theta)}{3M} = \frac{2(60 - 48)}{3 \cdot 8} m/s^2 = 1 m/s^2.$$

Μπορεί να ασκηθεί κατάλληλη τριβής που να εξασφαλίζει την παραπάνω επιτάχυνση; Από την (2) βρίσκουμε $T_1 = \frac{1}{2} M a_{cm,1} = 4N$, ενώ η μέγιστη δυνατή τιμή της στατικής τριβής έχει μέτρο $T_{op} = \mu_s \cdot N = 0,5 \cdot 64N = 32N$. Άρα η ασκούμενη τριβή είναι στατική και ο τροχός κυλιέται. Αλλά τότε τη στιγμή $t_1 = 4s$ η ταχύτητα του κέντρου Ο του τροχού έχει μέτρο:

$$v_{cm} = a_{cm,1} \cdot t_1 = 1 \cdot 4 m/s = 4 m/s$$

iii) Τι θα αλλάξει στην κίνηση όταν αυξάνουμε το μέτρο της ασκούμενης δύναμης; Προφανώς οι σχέσεις (1) και (2) ισχύουν, θεωρώντας σύνθετη την κίνηση του τροχού. Το θέμα είναι η κίνηση είναι κύλιση ή όχι; Υποθέτουμε ξανά ότι έχουμε κύλιση οπότε από την (3) βρίσκουμε:

$$a_{cm,2} = \frac{2(F_2 - Mg \cdot \eta \mu \theta)}{3M} = \frac{2(160 - 48)}{3 \cdot 8} m/s^2 = \frac{28}{3} m/s^2.$$

$$\text{Αλλά τότε απαιτείται τριβή μέτρου } T_2 = \frac{1}{2} M \cdot a_{cm,2} \approx 37,3N > T_{op}!$$

Η υπόθεση δηλαδή ότι έχουμε κύλιση μας οδήγησε σε άτοπο.

Αυτό σημαίνει ο τροχός περιστρέφεται ενώ ταυτόχρονα ολισθαίνει και η ασκούμενη τριβή, είναι τριβή ολίσθησης, μέτρου $T_{ολ} = 32N$. Αλλά τότε από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$a_{cm,2} = \frac{F_2 - Mg \cdot \eta \mu \theta - T_{ολ}}{M} = \frac{160 - 48 - 32}{8} m/s^2 = 10 m/s^2.$$

$$a_{\gamma\omega\nu,2} = \frac{2T_{ολ}}{MR} = \frac{2 \cdot 32}{8R} = \frac{8}{R} \text{ (S.I.)}$$

α) Η κίνηση του κέντρου μάζας, στο χρονικό διάστημα από 4s-6s, θα είναι λοιπόν ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, οπότε θα έχουμε:

$$v = v_1 + a_{cm,2} \cdot (t - t_1) \text{ και } \Delta x = v_1(t - t_1) + \frac{1}{2} a_{cm,2} \cdot (t - t_1)^2$$

όπου τη στιγμή t_2 θα έχουμε:

$$v_2 = 4m/s + 10 \cdot 2m/s = 24m/s.$$

Οπότε η ζητούμενη γραφική παράσταση, είναι όπως στο διπλανό σχήμα.

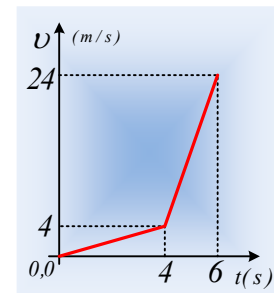
β) Στο χρονικό διάστημα 0-4s το κέντρο μάζας του τροχού μετατοπίζεται κατά:

$$x_1 = \frac{1}{2} a_{cm,1} \cdot t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 16m = 8m$$

Ενώ από 4s-6s κατά:

$$x_2 = v_1(t - t_1) + \frac{1}{2} a_{cm,2} \cdot (t - t_1)^2 = 4 \cdot 2m + \frac{1}{2} 10 \cdot 2^2 m = 28m$$

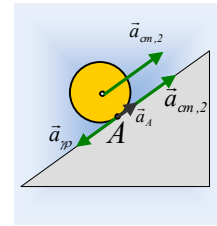
Αλλά τότε η δύναμη μεταφέρει ενέργεια στον τροχό, ίση με το έργο της:



$$W_F = F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 = 60 \cdot 8J + 160 \cdot 28J = 4.960J$$

Στο χρονικό διάστημα 0-4s η ασκούμενη τριβή είναι στατική και ασκείται σε σημείο το οποίο έχει μηδενική ταχύτητα, οπότε δεν παράγει έργο.

Για το διάστημα 4s-6s, το σημείο επαφής A του τροχού με το έδαφος, στη διεύθυνση της κίνησης, έχει λόγω μεταφορικής κίνησης επιτάχυνση $\vec{a}_{cm,2}$ και λόγω περιστροφικής κίνησης $\vec{a}_{\gamma\rho}$ όπως στο σχήμα, όπου $a_{\gamma\rho} = a_{\gamma\omega v,2} \cdot R$ (έχει και κεντρομόλο επιτάχυνση στην κάθετη διεύθυνση, η οποία δεν μας ενδιαφέρει αυτή τη στιγμή...). Αλλά τότε η επιτάχυνση του σημείου εφαρμογής της τριβής (σημείο A) έχει επιτάχυνση:



$$a_A = a_{cm,2} - a_{\gamma\omega v,2} \cdot R = 10 \text{ m/s}^2 - 8 \text{ m/s}^2 = 2 \text{ m/s}^2 \text{ με κατεύθυνση προς τα πάνω.}$$

Έτσι στο χρονικό αυτό διάστημα, το σημείο εφαρμογής της τριβής μετατοπίζεται κατά:

$$\Delta x_\tau = \frac{1}{2} a_A \cdot (\Delta t)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^2 \text{ m} = 4 \text{ m}$$

Με αποτέλεσμα το έργο της τριβής (που μετράει τη μηχανική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική) είναι ίσο:

$$W_T = -T \cdot \Delta x_\tau = -32 \cdot 4J = -128J$$

γ) Η κινητική ενέργεια του τροχού λόγω περιστροφής μεταβάλλεται εξαιτίας της ροπής της τριβής, οπότε:

$$\frac{dK_\pi}{dt} = \tau_T = \tau\omega = TR \cdot \omega$$

Αλλά τη στιγμή t_1 ο τροχός στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = \frac{v_l}{R}$ (κύλιση) ενώ τη στιγμή

μή t_2 έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega_2 = \omega_1 + a_{\gamma\omega v,2} \cdot (t_2 - t_1)$ οπότε:

$$\frac{dK_\pi}{dt} = TR \cdot \omega = TR \cdot \left(\frac{v_l}{R} + a_{\gamma\omega v,2} \Delta t \right) = T \cdot (v_l + R a_{\gamma\omega v,2} \Delta t) \rightarrow$$

$$\frac{dK_\pi}{dt} = 32(4 + 8 \cdot 2) J / s = 640 J / s$$

Σχόλιο:

Θα μπορούσαμε να εμπλέξουμε τη μεταφορική και τη στροφική κίνηση του τροχού στον υπολογισμό του έργου της τριβής. Παραπάνω προτιμήθηκε να δουλέψουμε ενιαία, με τη μετακίνηση του σημείου εφαρμογής της...

dmargaris@gmail.com