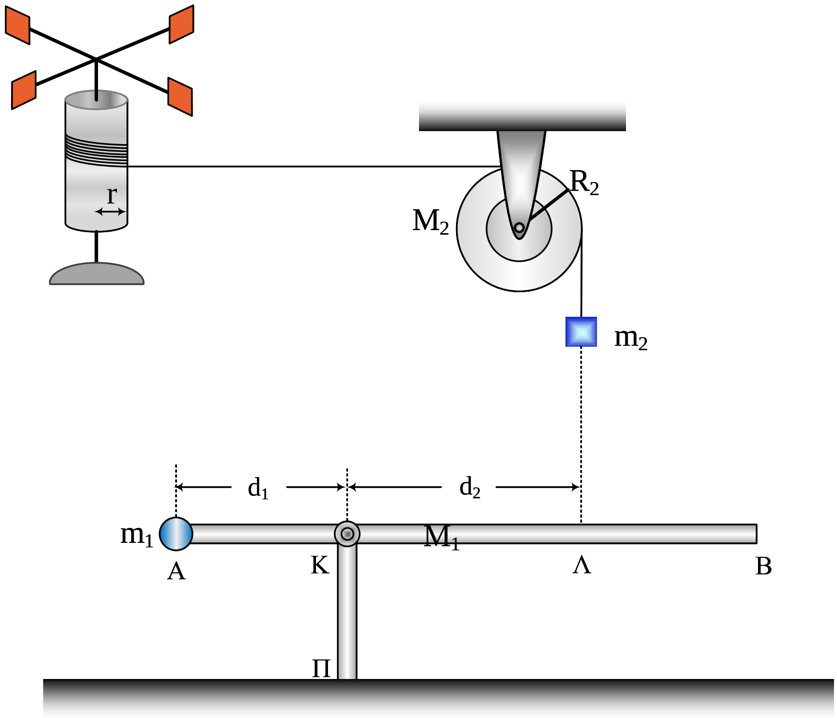
Ο κόφτης έφτασε.

Ο κύλινδρος του σχήματος έχει ακτίνα $r = 0{,}1$ m και πάνω του έχει προσαρμοσμένα 4 πτερύγια ακτίνας $R = 0{,}2$ m. Η ροπή αδράνειας του στερεού είναι $I = 0{,}2\ kg \cdot m^2$ (μαζί με τα πτερύγια). Τα πτερύγια δημιουργούν συνολική ροπή που αντιτίθεται στην κίνηση, μέτρου $\tau = 0{,}4\upsilon$ (S.I.) όπου υ το μέτρο της ταχύτητας των πτερυγίων. Το σύστημα αποτελείται από μια τροχαλία μάζας $M_2 = 2$ kg και ακτίνας $R_2 = 0{,}2$ m και ένα σώμα μάζας $m_2 = 4$ kg.



Α. Αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί οπότε αρχικά επιταχύνεται ώσπου να αποκτήσει σταθερή ταχύτητα και στην συνέχεια κινείται ομαλά. Να βρείτε:

α. την αρχική επιτάχυνση ($t_0 = 0$) της μάζας m_2

β. την κινητική ενέργεια του κυλίνδρου όταν το σώμα μάζας m_2 αποκτά σταθερή ταχύτητα.

Β. Το σώμα μάζας m_2 καθώς κατεβαίνει και αφού έχει προλάβει να αποκτήσει σταθερή ταχύτητα, συναντά οριζόντια ράβδο μήκους $d = 2$ m και μάζας $M_1 = 3{,}75$ kg που ισορροπεί οριζόντια στηριζόμενη στο σημείο Κ έχοντας στο άκρο της Α σημειακή μάζα $m_1 = 2{,}5$ kg όπως στο σχήμα. Το σώμα μάζας m συγκρούεται με τη ράβδο στο σημείο Λ συσσωματώνεται και αποκτά γωνιακή ταχύτητα $\omega = 3$ rad/s. Το σημείο στήριξης της ράβδου απέχει από το έδαφος απόσταση $ΚΠ = y = 0{,}462$ m. Να βρείτε:

α. την απόσταση $ΑΚ = d_1$

β. την απόσταση $ΚΛ = d_2$ στην οποία συγκρούεται και κολλά το σώμα μάζας m

γ. το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος M_1, m_1, m_2 ως προς το σημείο περιστροφής Κ αμέσως μετά την κρούση.

δ. την ταχύτητα του σημείου Β με την οποία το άκρο της ράβδου χτυπά στο έδαφος.

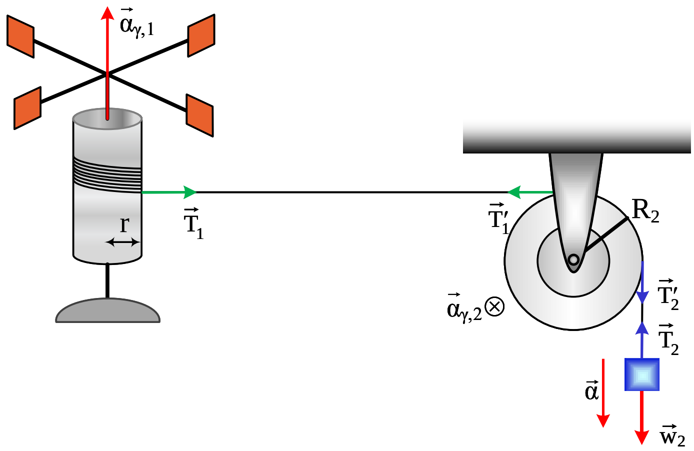
Δίνεται η ροπή αδράνειας για την τροχαλία $I = \frac{1}{2}M_2R_2^2$ και για την ράβδο $I_{cm} = \frac{M_1d^2}{12}$.

Επίσης η στροφορμή σημειακού αντικειμένου που κινείται ευθύγραμμα και η ευθεία κίνησης του βρίσκεται σε απόσταση ℓ από κάποιο σημείο δίνεται από τη σχέση L = mυℓ.

Για τις πράξεις σας θεωρήστε g = 10 m/s^2. Το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό και μετά την κρούση του $Σ_2$ με την ράβδο χαλαρώνει και δεν επηρεάζει το σύστημα. Επίσης d_1, d_2 < 0,8 m .

Λύση

Α. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στην διάρκεια της κίνησης φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



Επειδή το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό ισχύει για τα μέτρα: $T'_1 = T_1$, $T'_2 = T_2$ επίσης όλα τα σημεία του νήματος έχουν την ίδια ταχύτητα και ίδια επιτάχυνση και ίση με την επιτρόχια επιτάχυνση της περιφέρειας του κυλίνδρου ($α_{γ,1}$) και την επιτρόχια επιτάχυνση της περιφέρειας της τροχαλίας ($α_{γ,2}$) κατά μέτρο.

Άρα $α = α_{επ.(κυλ)} = α_{επ.(τροχ)} \Rightarrow α = α_{γ,1}r = α_{γ,2}R_2$. Άρα $α_{γ,2} = \frac{α}{R_2}$ και $α_{γ,1} = \frac{α}{r}$

$$\left.\begin{aligned} Σ\vec{τ} &= I\vec{α}_{γ,1} \\ Σ\vec{τ} &= I_2\vec{α}_{γ,2} \\ Σ\vec{F} &= m_2\vec{α} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} T_1r - τ &= Iα_{γ,1} \\ T'_2R_2 - T'_1R_2 &= \frac{1}{2}M_2R_2^2\frac{α}{R_2} \\ mg - T_2 &= m_2α \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} T_1 - \frac{τ}{r} &= \frac{I}{r^2}α \\ T_2 - T_1 &= \frac{1}{2}M_2α \\ mg - T_2 &= m_2α \end{aligned}\right\} \Rightarrow mg - \frac{τ}{r} = (\frac{I}{r^2} + \frac{M_2}{2} + m_2)α \Rightarrow$$

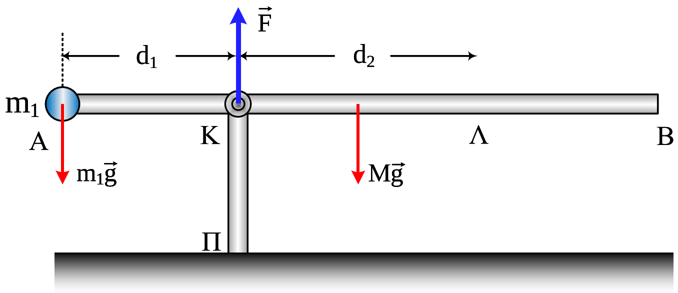
40 – 4υ = 25α (S.I.)

Άρα την χρονική στιγμή t_0 = 0, έχουμε υ = 0 και α = 1,6 m/s^2.

β. Όλο το σύστημα που στρέφεται αποκτά σταθερή ταχύτητα όταν έχουμε α = 0, οπότε υ = 10 m/s (η ταχύτητα των πτερύγιων). Ο κύλινδρος στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα υ = $ω_1$R ⇒ $ω_1$ = 50 rad/s.

Η κινητική του ενέργεια είναι: $K_1 = \frac{1}{2}I\omega_1^2 \Rightarrow \mathbf{K_1 = 250\,J}$.

Β. α. Η ράβδος ισορροπεί άρα Στ = 0 έτσι:



$\Sigma\vec{\tau}_K = \vec{0} \Rightarrow m_1 g d_1 - M_1 g(\frac{d}{2} - d_1) = 0 \Rightarrow \mathbf{d_1 = 0{,}6\,m}$.

β. Κατά την κρούση στο σύστημα έχουμε την ροπή του $\vec{w}_2$ και της τάσης $\vec{T}_2$, όπου ισχύει Στ = 0 οπότε μπορούμε να γράψουμε $\vec{L}_{\alpha\rho\chi(K)} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda(K)} \Rightarrow m_2 \upsilon_2 d_2 = I_{o\lambda}\omega$ (1)

Για την ροπή αδράνειας έχουμε:

Ράβδος: $I_\rho = \frac{1}{12}M_1 d^2 + M_1(\frac{d}{2} - d_1)^2 \Rightarrow \mathbf{I_2 = 1{,}85\,kg \cdot m^2}$

Μάζα m1: $I_1 = m_1 d_1^2 \Rightarrow \mathbf{I_1 = 0{,}9\,kg \cdot m^2}$

Μάζα m2: $I_2 = m_2 d_2^2 \Rightarrow \mathbf{I_2 = 4d_2^2}$ (S.I.)

Άρα $I_{o\lambda} = I_\rho + I_1 + I_2 \Rightarrow I_{o\lambda} = 2{,}75 + 4d_1^2$ (S.I.) (2)

Επειδή το σχοινί είναι μη εκτατό θα έχουν όλες οι στοιχειώδης μάζες του την ίδια ταχύτητα και ίση μ' αυτή των σημείων της περιφέρειας του κυλίνδρου. $\upsilon_2 = \omega_1 r \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_2 = 5\,m/s}$.

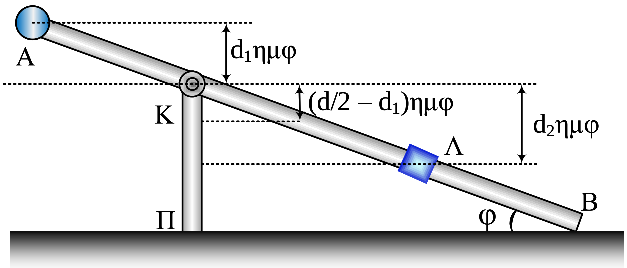
Από την (1) έχουμε: $20d_2 = (2{,}75 + 4d_1^2)3$ (S.I.) $\Rightarrow 12d_2^2 - 20d_2 + 8{,}25 = 0$ (S.I.)

Με λύσεις $\mathbf{d_2 = 0{,}75\,m}$ και $d_2 = \frac{11}{12}\,m > 0{,}8\,m$ (η οποία απορρίπτεται).

γ. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς το σημείο Κ είναι:

$$\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_K = \Sigma\vec{\tau}_K \Rightarrow \left.\frac{dL}{dt}\right|_K = M_1 g(\frac{d}{2} - d_1) - m_1 g d_1 + m_2 g d_2 \Rightarrow \left.\mathbf{\frac{dL}{dt}}\right|_K \mathbf{= 30\,\frac{kg \cdot m^2}{s^2}}.$$

δ. Την στιγμή που το άκρο Β φτάνει στο έδαφος η ράβδος σχηματίζει γωνία με την οριζόντιο που ισχύει:



$$\eta\mu\varphi = \frac{y}{d - d_1} \Rightarrow \eta\mu\varphi = 0{,}33$$

Εφαρμόζω Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση της ράβδου από την οριζόντια θέση μέχρι και λίγο πριν χτυπήσει στο έδαφος (από την (2) $I_{ολ} = 5\ kg\cdot m^2$).

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2} I_{ολ}(\omega'^2 - \omega^2) = -m_1 g d_1 ημφ + M_1 g(\frac{d}{2} - d_1)ημφ + m_2 g d_2 ημφ \Rightarrow \boldsymbol{\omega' = 3{,}6\,\frac{rad}{s}}$$

Το άκρο Β θα έχει ταχύτητα $υ_B = \omega'(d - d_1) \Rightarrow$ **$υ_B$ = 5,04 m/s**.