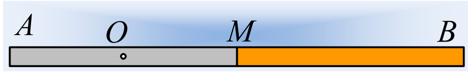
Δύο ενωμένες ράβδοι στρέφονται.



Δύο ομογενείς ράβδοι Α και Β, ίδιου μήκους και της ίδιας μάζας, είναι ενωμένες δημιουργώντας ένα στερεό s, το οποίο μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το μέσον Ο της Α. Φέρνουμε το στερεό σε οριζόντια θέση, όπως στο σχήμα και το αφήνουμε να κινηθεί. Η αρχική επιτάχυνση του σημείου Μ, στο οποίο ενώνονται οι δύο ράβδοι είναι $α_1$, ενώ η μέγιστη ταχύτητα που αποκτά στη διάρκεια της κίνησης είναι $υ_1$.

Αν η ράβδος Α ήταν αβαρής, τότε:

i) Το σημείο Μ αποκτά αρχική επιτάχυνση $α_2$, όπου:

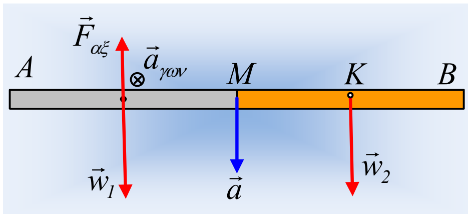
α) $α_2<α_1$, β) $α_2 = α_1$ γ) $α_2 > α_1$.

ii) Για τη μέγιστη ταχύτητα $υ_2$ του σημείου Μ ισχύει:

α) $υ_2 < υ_1$, β) $υ_2 = υ_1$, γ) $υ_2 > υ_1$.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση:



i) Μόλις αφεθεί το στερεό να κινηθεί, στη θέση που οι ράβδοι είναι οριζόντιοι, οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω του, φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Εφαρμόζοντας το 2^o νόμο του Νεύτωνα και θεωρώντας θετική τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, έχουμε:

$$Στ = I_s a_{γων} \to mg\ell = (I_A + I_B)a_{γων1} \to$$

$$a_M = a_1 = a_{γων1} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{mg\ell^2}{2(I_A + I_B)} \quad (1)$$

Αν τώρα η Α ράβδος ήταν αβαρής η παραπάνω εξίσωση θα ήταν αντίστοιχα:

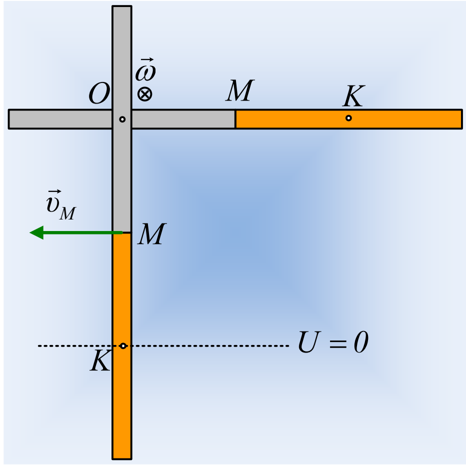
$$a_2 = a_{γων2} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{mg\ell^2}{2I_B} \quad (2)$$

Από την σύγκριση των (1) και (2) προκύπτει ότι $α_2 > α_1$. Σωστό το γ).

Σχόλιο 1:

Το στερεό s επιταχύνεται από τη ροπή του βάρους της Β ράβδου και στις δύο περιπτώσεις, αφού ο άξονας περνάει από το μέσον της Α ράβδου. Αλλά τότε μεγαλύτερη γωνιακή επιτάχυνση έχουμε στην περίπτωση της αβαρούς ράβδου (μικρότερη αδράνεια, όπως αυτή εκφράζεται από τη ροπή αδράνειας…), οπότε και το σημείο Μ αποκτά μεγαλύτερη επιτάχυνση.

ii) Το σημείο Μ θα αποκτήσει τη μεγαλύτερη ταχύτητά του τη στιγμή που το στερεό s θα έχει και τη μέγιστη γωνιακή ταχύτητα, αφού $\upsilon_M=\omega\cdot\frac{\ell}{2}$. Αυτό συμβαίνει στην κατακόρυφη θέση, αφού μέχρι τη θέση αυτή η ροπή του βάρους w_2 επιταχύνει το στερεό, ενώ στη συνέχεια η ροπή έχει αντίθετη κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας και η κίνηση γίνεται επιβραδυνόμενη. Έτσι με εφαρμογή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, λαμβάνοντας την κατώτερη θέση του μέσου K της B ράβδου ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, έχουμε:



$$K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ}\rightarrow$$

$$0+2mg\ell=\frac{1}{2}I_s\omega_1^2+mg\ell\rightarrow$$

$$\omega_1=\sqrt{\frac{2mg\ell}{I_A+I_B}}\rightarrow\upsilon_1=\sqrt{\frac{2mg\ell}{I_A+I_B}}\cdot\frac{\ell}{2}\quad(3)$$

Στην δεύτερη περίπτωση με αβαρή την A ράβδο, θα έχουμε αντίστοιχα:

$$K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ}\rightarrow$$

$$0+mg\ell=\frac{1}{2}I_s\omega_1^2\rightarrow$$

$$\omega_2=\sqrt{\frac{2mg\ell}{I_B}}\rightarrow\upsilon_2=\sqrt{\frac{2mg\ell}{I_B}}\cdot\frac{\ell}{2}\quad(4)$$

Από την σύγκριση των (3) και (4) προκύπτει ότι $\upsilon_2>\upsilon_1$, σωστό ξανά το γ).

Σχόλιο 2:

Στην πρώτη περίπτωση η περιστροφή του στερεού συνοδεύεται από μείωση της δυναμικής ενέργειας της B ράβδου (το κέντρο μάζας της A σφαίρας παραμένει σταθερό στο σημείο O). Η μείωση αυτή εμφανίζεται ως κινητική ενέργεια ΚΑΙ των δύο ράβδων. Αντίθετα, στην δεύτερη περίπτωση αυτή η μείωση της δυναμικής ενέργειας εμφανίζεται ΜΟΝΟ ως κινητική ενέργεια της B ράβδου. Αλλά τότε στην περίπτωση της αβαρούς ράβδου A, θα έχουμε μεγαλύτερη κινητική ενέργεια, μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα, συνεπώς και μεγαλύτερη ταχύτητα του σημείου M.

dmargaris@gmail.com