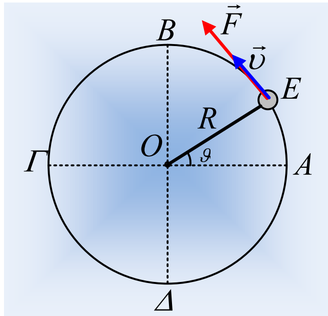
Μια ΟΚΚ σε κατακόρυφο επίπεδο.



Ένα σφαιρίδιο μάζας 0,4kg, δεμένο στο άκρο νήματος διαγράφει κατακόρυφο κύκλο, κέντρου Ο και ακτίνας R=0,8m με σταθερή κατά μέτρο ταχύτητα υ=4m/s. Για να μπορεί να πραγματοποιεί την παραπάνω κίνηση, δέχεται διαρκώς κάποια εφαπτομενική μεταβλητού μέτρου δύναμη F, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, για μια θέση Ε.

i) Έχει επιτάχυνση το σφαιρίδιο στη θέση Ε που δίνεται στο σχήμα; Αν ναι να σχεδιαστεί το διάνυσμά της, υπολογίζοντας και το μέτρο της. Η επιτάχυνση αυτή παραμένει σταθερή ή μεταβάλλεται στη διάρκεια της κίνησης του σφαιριδίου;

ii) Τη στιγμή που το σφαιρίδιο περνά από τη θέση Γ, με το νήμα οριζόντιο:

α) Να σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω του.

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα τους.

iii) Στο σχήμα βλέπετε την ανώτερη θέση Β και την κατώτερη θέση της τροχιάς Δ. Για τις θέσεις αυτές να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της δύναμης F που πρέπει να ασκείται στο σφαιρίδιο,

β) το μέτρο της τάσης του νήματος.

iv) Αν στην θέση Ε που φαίνεται στο σχήμα, το νήμα σχηματίζει με την οριζόντια θέση γωνία θ, όπου ημθ=0,6 και συνθ=0,8, να βρείτε για τη θέση αυτή:

α) Το μέτρο της δύναμης F.

β) Το μέτρο της τάσης του νήματος.

v) Θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο Ο (προφανώς και από τις θέσεις Α και Γ):

α) Να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια του σφαιριδίου στη θέση Ε, καθώς και το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας στην θέση αυτή. Με ποιο ρυθμό μεταφέρεται ενέργεια, μέσω του έργου της δύναμης F, στο σφαιρίδιο;

β) Αν το σφαιρίδιο περνά από τη θέση Α, τη στιγμή t=0, να βρεθεί η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας του σφαιριδίου σε συνάρτηση με το χρόνο και να παρασταθεί γραφικά.

Δίνεται $g=10m/s^2$.

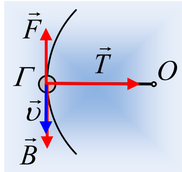
Απάντηση:

i) Στη διάρκεια της ομαλής κυκλικής κίνησης του σφαιριδίου, η ταχύτητά του παραμένει σταθερή κατά μέτρο, αλλά η διεύθυνσή της αλλάζει. Συνεπώς το σφαιρίδιο επιταχύνεται, η επιτάχυνσή του λέγεται κεντρομόλος, με κατεύθυνση προς το κάντρο Ο της τροχιάς και με μέτρο:

$$\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{4^2}{0,8} m/s^2 = 20m/s^2.$$

Η επιτάχυνση αυτή διατηρεί σταθερό το μέτρο της, σε κάθε θέση, **δεν είναι** όμως σταθερή, αφού αλλάζει διεύθυνσή της, παραμένοντας πάντα πάνω στην ακτίνα του κύκλου και με φορά προς το κέντρο.

ii) α) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σφαιρίδιο, στην θέση Γ, όπου Β το βάρος και Τ η τάση του νήματος.



β) Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$\Sigma F_x = m\cdot\alpha_x \rightarrow T = m\cdot\alpha_\kappa$ (1)

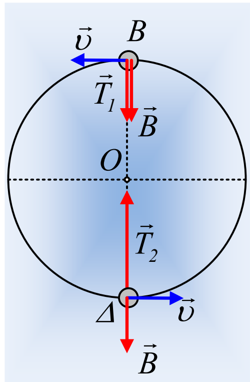
$\Sigma F_y = m\cdot\alpha_y \rightarrow F - mg = m\cdot\alpha_y$ (2)

Όπου α_x και α_y η οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της επιτάχυνσης του σφαιριδίου. Αλλά η μόνη επιτάχυνση στην ομαλή κυκλική κίνηση είναι η κεντρομόλος, όπου εδώ ταυτίζεται με την α_x, οπότε $\alpha_y=0$ και από την (2) παίρνουμε:

$F = B = mg = 0{,}4\cdot 10N = 4N$

Ενώ $T = m\cdot\alpha_\kappa = 0{,}4\cdot 20N = 8N.$

iii) Με βάση τα προηγούμενα, στις θέσεις Β και Δ, όπου το σφαιρίδιο έχει οριζόντια ταχύτητα, η επιτάχυνση (κεντρομόλος) είναι κατακόρυφη, οπότε δεν απαιτείται η άσκηση οριζόντιας δύναμης F, η οποία, αν ασκείτο, θα προκαλούσε και οριζόντια επιτάχυνση!



α) Έτσι και για τις δύο αυτές θέσεις F=0.

β) Για την θέση Β:

$\Sigma F_y = m\cdot\alpha_k \rightarrow T_1 + B = m\cdot\alpha_k \rightarrow$

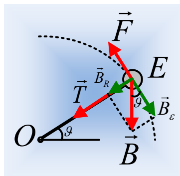
$T_1 = m\cdot\alpha_k - mg = 0{,}4\cdot 20N - 0{,}4\cdot 10N = 4N.$

Για τη θέση Δ:

$\Sigma F_y = m\cdot\alpha_k \rightarrow T_2 - B = m\cdot\alpha_k \rightarrow$

$T_2 = m\cdot\alpha_k + mg = 0{,}4\cdot 20N + 0{,}4\cdot 10N = 12N.$

iv) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στο σφαιρίδιο, στη θέση Ε. Αναλύοντας το βάρος σε μια εφαπτομενική συνιστώσα B_ε και μια ακτινική B_R, έχουμε:



$B_\varepsilon = B\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = mg\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = 0{,}4\cdot 10\cdot 0{,}8N = 3{,}2N$ *και*

$B_R = B\cdot\eta\mu\theta = mg\cdot\eta\mu\theta = 0{,}4\cdot 10\cdot 0{,}6N = 2{,}4N.$

α) Το σφαιρίδιο έχει ξανά επιτάχυνση στη διεύθυνση της ακτίνας, οπότε:

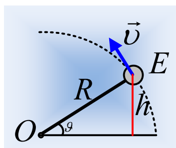
$\Sigma F_\varepsilon = 0 \rightarrow F = B_\varepsilon = 3{,}2N.$

β) Στη διεύθυνση της ακτίνας εξάλλου έχουμε:

$\Sigma F_R = F_\kappa \rightarrow T + B_R = m\cdot\alpha_\kappa \rightarrow$

$T_E = T = m\cdot\alpha_\kappa - B_R = 0{,}4\cdot 20N - 2{,}4N = 5{,}6N.$

v) Το σφαιρίδιο στη θέση Ε, βρίσκεται σε ύψος h, από το Ε.Μ.Δ.Ε. όπου h=R·ημθ, οπότε:



α) η δυναμική του ενέργεια είναι ίση:

$$U = mgh = mgR\cdot\eta\mu\theta \ (3)$$

$$U = 0{,}4\cdot 10\cdot 0{,}8\cdot 0{,}6J = 1{,}92J.$$

Εξάλλου το έργο του βάρους συνδέεται με τη διαφορά της δυναμικής ενέργειας με τη σχέση:

$$W_B=U_{αρχ}-U_{τελ} \rightarrow W_B=-\Delta U$$

Οπότε έχουμε και $\dfrac{dU}{dt}=-\dfrac{dW_B}{dt}=-\dfrac{B_x\cdot dx\cdot συν\vartheta}{dt}=B_ε υ=3{,}2\cdot 4J/s=12{,}8J/s$

Ενώ ο ρυθμός με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια, μέσω του έργου της δύναμης F, είναι ίσος με την ισχύ της δύναμης, δηλαδή:

$$\frac{dW_F}{dt}=P_F=Fυ=3{,}2\cdot 4J/s=12{,}8J/s$$

Βλέπουμε δηλαδή, ότι η δυναμική ενέργεια του σώματος, αυξάνεται με ρυθμό ίσο με το ρυθμό που μεταφέρεται ενέργεια στο σώμα μέσω του έργου της δύναμης, πράγμα αναμενόμενο, αφού η κινητική ενέργεια του σώματος παραμένει σταθερή.

β) Αν το σώμα περνά τη στιγμή t=0 από τη θέση Α, τότε στην τυχαία θέση, έστω στο Ε, φτάνει τη στιγμή t, έχοντας η επιβατική του ακτίνα διαγράψει, γωνία θ, ίση με:

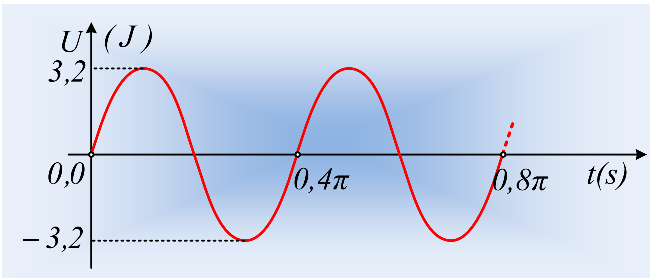
$$θ=ω\cdot t=\frac{υ}{R}t=\frac{4}{0{,}8}t=5t \text{ (μονάδες στο S.I.)}$$

Αλλά τότε η δυναμική του ενέργεια παρέχεται από την σχέση (3):

$$U=mgR\cdot ημθ=0{,}4\cdot 10\cdot 0{,}8\cdot ημ(5t)=3{,}2\cdot ημ(5t) \text{ (S.I.)}$$

Με αποτέλεσμα η γραφική της παράσταση να έχει τη μορφή του παρακάτω σχήματος, αφού λάβουμε υπόψη ότι για την περίοδο έχουμε:

$$υ=\frac{2\pi R}{T}\rightarrow T=\frac{2\pi R}{υ}=\frac{2\pi\cdot 0{,}8}{4}s=0{,}4\pi \text{ (s)}$$



dmargaris@gmail.com