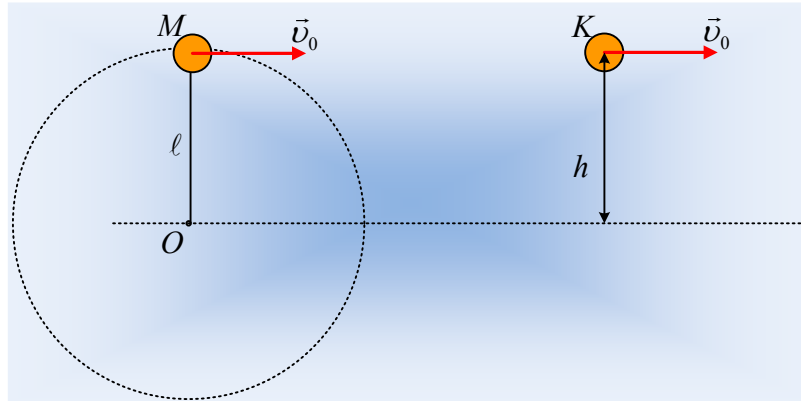


### Μια οριζόντια βολή και μια κυκλική κίνηση

Μια μικρή σφαίρα Α μάζας  $m=0,2\text{kg}$  είναι δεμένη στο άκρο αβαρούς νήματος διαγράφοντας κατακόρυφο κύκλο κέντρου  $O$  και ακτίνας  $R=\ell=1,25\text{m}$ . Τη στιγμή που περνά από το ψηλότερο σημείο της τροχιάς της  $M$  έχει ταχύτητα μέτρου  $v_0=5\text{m/s}$ . Μια δεύτερη όμοια σφαίρα Β εκτοξεύεται οριζόντια με την ίδια ταχύτητα  $v_0$  από σημείο  $K$ , στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με το σημείο  $M$ , όπως στο σχήμα.



- i) Να βρεθούν οι αρχικές επιταχύνσεις των δύο σφαιρών, καθώς και η τάση του νήματος στη θέση  $M$ .
- ii) Να υπολογιστούν οι ταχύτητες των δύο σφαιρών τη στιγμή που περνούν από το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το κέντρο  $O$  της κυκλικής τροχιάς.
- iii) Για τις παραπάνω θέσεις, αφού σχεδιαστούν οι δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σφαίρα, να υπολογιστούν τα μέτρα τους.
- iv) Ποια σφαίρα φτάνει πρώτη στο οριζόντιο επίπεδο που περνά από το  $O$ , αν ξεκινούν ταυτόχρονα από τις θέσεις  $M$  και  $K$ ;

Αντίσταση αέρα δεν υπάρχει ενώ  $g=10\text{m/s}^2$ .

#### Απάντηση:

- i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στις σφαίρες. Το βάρος και η τάση  $T$  του νήματος στην  $A$  σφαίρα.

Η σφαίρα  $A$  έχει κεντρομόλο επιτάχυνση, με κατεύθυνση προς το κέντρο  $O$  (άρα κατακόρυφη) μέτρου:

$$a_{\text{κεντ}} = \frac{v_0^2}{R} = \frac{5^2}{1,25} \text{ m/s}^2 = 20 \text{ m/s}^2$$

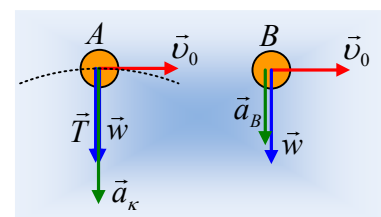
Η σφαίρα  $B$ , λόγω βάρους, αποκτά κατακόρυφη επιτάχυνση  $a_B=g=10\text{m/s}^2$ .

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την  $A$  σφαίρα στη θέση  $M$  παίρνουμε:

$$\Sigma F = m \cdot a \rightarrow T + w = m \cdot a_{\kappa} \rightarrow$$

$$T = m a_{\kappa} - mg = 0,2 \cdot 20\text{N} - 0,2 \cdot 10\text{N} = 2\text{N}$$

- ii) Κατά την κίνηση και των δύο σφαιρών από τις αρχικές θέσεις  $M$  και  $K$ , μέχρι να φτάσουν στο οριζόντιο επίπεδο που περνά από το  $O$ , μετατοπιζόμενες κατακόρυφα κατά  $h=\ell$ , η μόνη δύναμη που παράγει έρ-



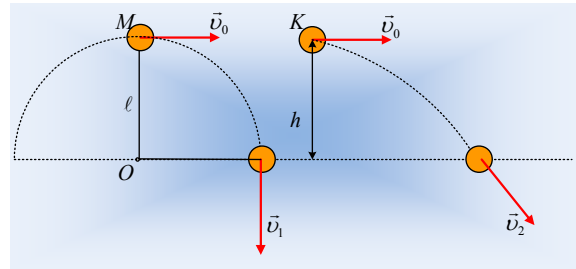
γο, είναι το βάρος, δύναμη συντηρητική, συνεπώς η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή. Έτσι ορίζοντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το κέντρο O, ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, παίρνουμε:

$$E_{μηχ. αρχ} = E_{μηχ. τελ} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + mgh = \frac{1}{2} m v_{τελ}^2 + 0 \rightarrow$$

$$v_1 = v_2 = v_{τελ} = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \rightarrow$$

$$v_1 = v_2 = \sqrt{5^2 + 2 \cdot 10 \cdot 1,25} \text{ m/s} = 5\sqrt{2} \text{ m/s}$$

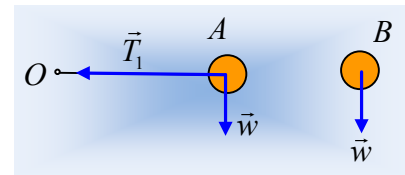


Η ταχύτητα της πρώτης σφαίρας είναι κατακόρυφη, ως εφαπτόμενη του κύκλου, ενώ για την ταχύτητα της B, αυτή προκύπτει ως το διανυσματικό άθροισμα μιας οριζόντιας συνιστώσας, ίσης με  $\vec{v}_0$  και της κατακόρυφης  $v_y$ . Αλλά τότε η διεύθυνσή της σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία  $\theta$ , όπου

$$\sigmaυν\theta = \frac{v_0}{v_2} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Η ταχύτητα δηλαδή της B σφαίρας σχηματίζει γωνία  $45^\circ$  με την οριζόντια διεύθυνση.

- iii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στις δυο σφαίρες, όπου το βάρος έχει μέτρο  $w=mg=0,2 \cdot 10 \text{ N}=2 \text{ N}$ , ενώ η τάση του νήματος  $T_1$  «παίζει το ρόλο» της κεντρομόλου, οπότε έχει μέτρο:



$$T_1 = m \frac{v_1^2}{R} = 0,2 \frac{(5\sqrt{2})^2}{1,25} \text{ N} = 8 \text{ N}$$

- iv) Ας ξεκινήσουμε από τα εύκολα!!! Η B σφαίρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι εκτελεί σύνθετη κίνηση, οπότε στην κατακόρυφη διεύθυνση ισχύει:

$$y = \frac{1}{2} g t_2^2 \rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,25}{10}} \text{ s} = 0,5 \text{ s}$$

Για την A σφαίρα. Αν εκτελούσε ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητα μέτρου  $v_0$ , θα χρειαζόταν χρονικό διάστημα:

$$t_{1a} = \frac{T_1}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi R}{v_0} = \frac{\pi R}{2v_0} = \frac{3,14 \cdot 1,25}{2 \cdot 5} \text{ s} \approx 0,39 \text{ s}$$

Προφανώς η A σφαίρα κινείται επιταχυνόμενα κατά τη διάρκεια της παραπάνω μετακίνησης, συνεπώς το χρονικό διάστημα που θα χρειαστεί για να φτάσει στο οριζόντιο επίπεδο που περνά από το κέντρο O, θα είναι  $t_1 < 0,39 \text{ s}$ , οπότε θα φτάσει γρηγορότερα της B σφαίρας στην οριζόντια διεύθυνση.

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)