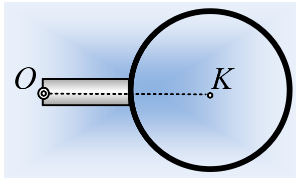
Εσωτερικές δυνάμεις και ροπές.



Μια ομογενής ράβδος μήκους ℓ=1m και μάζας Μ =6kg μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές, σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το άκρο της Ο. Στο άλλο άκρο της ράβδου προσκολλάται μια στεφάνη Σ, μάζας m=0,6kg και ακτίνας R=1m, οπότε έτσι δημιουργούμε ένα στερεό s. Φέρνουμε το στερεό σε θέση τέτοια, ώστε η ράβδος να είναι οριζόντια και το αφήνουμε να κινηθεί.

i) Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του στερεού s, ως προς τον άξονα περιστροφής του.

ii) Να βρεθεί η αρχική γωνιακή επιτάχυνση του στερεού, καθώς και η αρχική επιτάχυνση του κέντρου Κ της στεφάνης.

iii) Να υπολογίσετε τη δύναμη που ασκείται στην στεφάνη από τη δοκό, στην παραπάνω θέση.

iv) Υποστηρίζεται ότι στη στεφάνη, εκτός της παραπάνω δύναμης ασκείται και κάποια επιπλέον ροπή από τη δοκό. Να εξετάσετε την ορθότητα ή μη της παραπάνω θέσης.

v) Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται στο στερεό s από την άρθρωση, μόλις αφεθεί να κινηθεί.

vi) Να εξετάσετε αν η στεφάνη, πέρα από την άσκηση δύναμης, ασκεί επιπλέον και κάποια ροπή στη ράβδο.

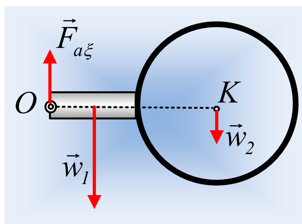
Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα περιστροφής ο οποίος περνά από το μέσον της I_{cm}= 1/12 $M\ell^2$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

i) Για τη ροπή αδράνειας του στερεού το οποίο αποτελείται από τη ράβδο και τη στεφάνη θα έχουμε ότι $I_s = I_1 + I'_2$ όπου I_1 η ροπή αδράνειας που οφείλεται στη ράβδο και I'_2 η ροπή αδράνειας η οποία οφείλεται στη στεφάνη. Έτσι έχουμε:

$$I_s = \left(\frac{1}{12}M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right) + \left(mR^2 + m(\ell+R)^2\right) = \frac{1}{3}M\ell^2 + 5m\ell^2 \rightarrow$$

$$I_s = \frac{1}{3}6 \cdot 1^2 kgm^2 + 5 \cdot 0{,}6 \cdot 1^2 kgm^2 = 5kgm^2 .$$



ii) Στο σχήμα φαίνονται οι (εξωτερικές) δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό s, μόλις αφεθεί να κινηθεί. Με εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα παίρνουμε:

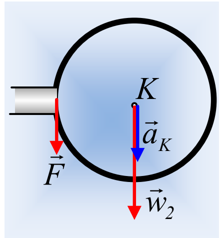
$$\Sigma\tau = I_s a_{γων} \rightarrow w_1 \cdot \frac{\ell}{2} + w_2 \cdot (\ell + R) = I_s a_{γων} \rightarrow$$

$$a_{γων} = \frac{Mg\ell + 2mg \cdot (\ell+R)}{2I_s} = \frac{6 \cdot 10 \cdot 1 + 2 \cdot 0{,}6 \cdot 10(1+1)}{2 \cdot 5} rad/s^2 = 8{,}4 rad/s^2 .$$

Αλλά τότε το κέντρο Κ της στεφάνης, αποκτά επιτάχυνση, κατακόρυφη, όπως στο παρακάτω σχήμα με μέτρο:

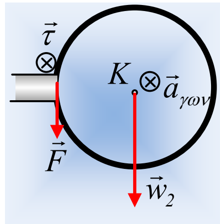
$$\alpha_K = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot (\ell + R) = 8{,}4 \cdot 2m/s^2 = 16{,}8m/s^2.$$

iii) Οι δυνάμεις που ασκούνται στη στεφάνη είναι το βάρος w_2 και μια δύναμη από τη σανίδα F, ενώ από το 2^o νόμο του Νεύτωνα για την κίνηση του κέντρου μάζας της ($\Sigma\vec{F} = m\vec{a}_{cm}$) η επιτάχυνση έχει την κατεύθυνση της συνισταμένης δύναμης. Αλλά τότε και η δύναμη από τη ράβδο είναι κατακόρυφη, οπότε:



$$F + mg = m\alpha_K \rightarrow F = m(\alpha_K - g) = 0{,}6 \cdot (16{,}8 - 10)N = 4{,}08N.$$

iv) Εστιάζουμε την προσοχή μας στη στεφάνη. Μόλις αφεθεί το στερεό s να κινηθεί αποκτά τη γωνιακή επιτάχυνση, που υπολογίσαμε παραπάνω. Την ίδια γωνιακή επιτάχυνση αποκτά και η στεφάνη, κάθετη στο επίπεδο του σχήματος, με φορά προς τα μέσα, όπως στο σχήμα. Βλέπετε κάποια ροπή (των δυνάμεων που ασκούνται στη σφαίρα), υπεύθυνη για αυτή τη γωνιακή επιτάχυνση; Προφανώς ροπή ως προς το Κ, έχει μόνο η δύναμη F, αλλά η ροπή αυτή, αριστερόστροφη, θα μπορούσε να προσδώσει γωνιακή επιτάχυνση, αντίθετης κατεύθυνσης από αυτήν που αποκτά η στεφάνη. Συνεπώς είμαστε υποχρεωμένοι να δεχτούμε ότι η στεφάνη δέχεται και μια επιπλέον ροπή (ροπή ζεύγους) από τη ράβδο, κάθετη στο επίπεδο του σχήματος, με φορά προς τα μέσα, οπότε από το 2^o νόμο της κίνησης για τη στεφάνη παίρνουμε:

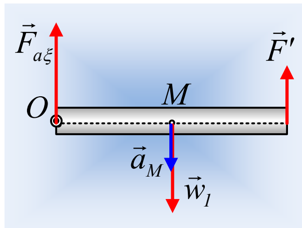


$$\Sigma\tau = I_K \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \tau - FR = mR^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$\tau = FR + mR^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} = (4{,}08 \cdot 1 + 0{,}6 \cdot 1^2 \cdot 8{,}4)Nm = 9{,}12Nm.$$

v) Ερχόμαστε τώρα στη ράβδο. Και αυτή αποκτά την ίδια γωνιακή επιτάχυνση με το στερεό s, ενώ δέχεται από την σφαίρα μια κατακόρυφη δύναμη F΄, την αντίδραση της F.

Το κέντρο μάζας της δοκού Μ, αποκτά κατακόρυφη επιτάχυνση, όπως στο σχήμα, μέτρου:



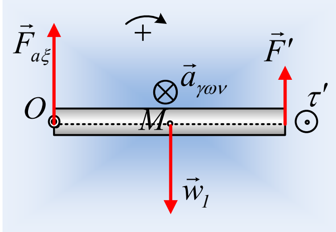
$$a_M = a_{\gamma\omega\nu} \frac{\ell}{2} = 8{,}4 \cdot 0{,}5m/s^2 = 4{,}2m/s^2.$$

Από το 2^o νόμο του Νεύτωνα για την κίνηση του κέντρου μάζας της ($\Sigma\vec{F} = M\vec{a}_{cm}$) η επιτάχυνση του κέντρου μάζας Μ, έχει την κατεύθυνση της συνισταμένης δύναμης.

$$\Sigma\vec{F} = Ma_{cm} \rightarrow w_1 - F' - F_{a\xi} = Ma_{cm} \rightarrow$$

$$F_{a\xi} = Mg - F' - Ma_{cm} = 60N - 4{,}08N - 6 \cdot 4{,}2N = 30{,}72N$$

vi) Έστω ότι η στεφάνη πέρα από την δύναμη F΄ ασκεί στη ράβδο και μια ροπή τ΄. Εφαρμόζοντας για τη ράβδο το 2^o νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφή της γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας M, θεωρώντας θετική την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, έχουμε:



$$\Sigma\tau_M = I_{cm}\cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$F_{\alpha\xi}\frac{\ell}{2}+\tau'-F'\frac{\ell}{2}=\frac{1}{12}M\ell^2\cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$\tau'=\frac{1}{12}M\ell^2\cdot a_{\gamma\omega\nu}-F_{\alpha\xi}\frac{\ell}{2}+F'\frac{\ell}{2} \rightarrow$$

$$\tau'=\frac{1}{12}6\cdot 1^2\cdot 8{,}4Nm - 30{,}72\cdot 0{,}5Nm + 4{,}08\cdot 0{,}5Nm = -9{,}12Nm$$

Δηλαδή η ράβδος δέχεται από την στεφάνη στο άκρο της, πέρα από την δύναμη F΄ και μια ροπή τ΄ με κατεύθυνση όπως στο σχήμα.

Σχόλια:

- Στο πρόβλημά μας, η στεφάνη είναι κολλημένη στο άκρο της ράβδου. Όσο λεπτή και να είναι η ράβδος, το σημείο συγκόλλησης δεν είναι μόνο ένα, ώστε να ασκηθεί μια μόνο δύναμη. Στην περίπτωση αυτή τα δύο στερεά αλληλεπιδρούν με μια κατανομή δυνάμεων και όχι με μια μόνο δύναμη. Η κατανομή αυτή είναι ισοδύναμη με μια δύναμη (η δύναμη F) και μία ροπή αλληλεπίδρασης (η ροπή τ, που υπολογίσαμε παραπάνω).
- Αξίζει να επισημανθεί ότι, όπως η αντίδραση της F, η F΄, ασκείται στη ράβδο, το ίδιο συμβαίνει και με την αντίδραση της ροπής που ασκείται στη στεφάνη, της τ. Και αυτή, η ροπή τ΄, ασκείται στη ράβδο, έχει το ίδιο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση με την τ. Με άλλα λόγια, ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα αναφέρεται σε δυνάμεις δράσης- αντίδρασης. Αλλά σε μια κατανομή δυνάμεων, όπως παραπάνω μεταξύ ράβδου και στεφάνης, όπου βρίσκουμε ροπή η οποία αποδίδεται σε ζεύγη δυνάμεων, πάντα έχουμε και ζευγάρια δράσης – αντίδρασης, συνεπώς και οι αντίστοιχες ροπές ικανοποιούν τον ίδιο νόμο. Ροπές αντίθετες, όπως παραπάνω υπολογίστηκαν (τ=+9,12Nm και τ΄=-9,12Nm)

dmargaris@gmail.com