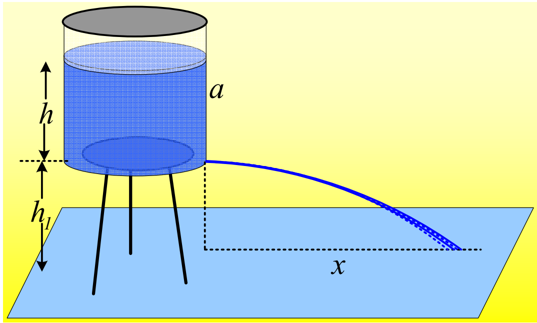
Θα αδειάσει το δοχείο;



Σε ένα τρίποδο σε ύψος h_1=1,2m από το έδαφος, έχουμε στερεώσει ένα δοχείο το οποίο είναι αεροσταγώς κλεισμένο και το οποίο περιέχει νερό μέχρι ύψος h=0,8m. Το δοχείο, κυλινδρικού σχήματος, έχει εμβαδόν βάσεως 0,3m^2 και ύψος α=1m. Αν ανοίξουμε μια μικρή τρύπα, κοντά στη βάση του δοχείου, το νερό πετάγεται, φτάνοντας σε οριζόντια απόσταση x=12m, ενώ σιγά- σιγά η φλέβα εξασθενεί και μετά από λίγο, το νερό σταματά να τρέχει.

i) Να βρεθεί η πίεση του αέρα πάνω από την επιφάνεια του νερού, τη στιγμή που αρχίζει η εκροή του νερού.

ii) Να ερμηνευτεί γιατί το νερό θα φτάνει στη συνέχεια όλο και σε μικρότερη οριζόντια απόσταση στο έδαφος.

iii) Να υπολογιστεί η πίεση του αέρα μέσα στο δοχείο, όταν σταματήσει η εκροή του νερού.

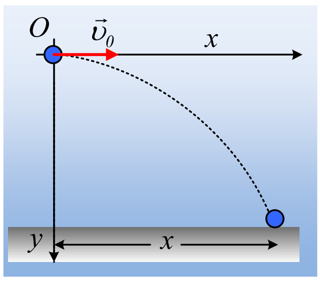
iv) Τελικά πόσος όγκος νερού βγήκε από την τρύπα που ανοίξαμε;

Το νερό να θεωρηθεί ιδανικό ρευστό, με πυκνότητα ρ=1.000kg/m^3, η ατμοσφαιρική πίεση είναι ίση με $p_{ατ}$=10^{5}N/m^2, ενώ η θερμοκρασία στη διάρκεια του πειράματος παραμένει σταθερή. Εξάλλου η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g=10m/s^2.

Απάντηση:

i) Το νερό αρχικά, μόλις ανοίξουμε την τρύπα, εκτοξεύεται οριζόντια με αρχική ταχύτητα $υ_0$. Αν περιοριστούμε σε μια μικρή μάζα νερού, σε ένα «σωματίδιο-ρευστού» (fluid particle), αντίστοιχο του υλικού σημείου, το οποίο χρησιμοποιούμε σε άλλα κεφάλαια φυσικής, αυτό θα εκτελέσει οριζόντια βολή, για την οποία θα ισχύει:

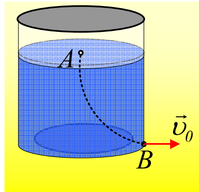
Άξονας x	Άξονας y
$υ_x=υ_o$ (1)	$υ_y=gt$ (3)
$x=υ_0 t$ (2)	$y=½\, gt^2$ (4)



Τη στιγμή που το σωματίδιο ρευστού φτάνει στο έδαφος x=12m, ενώ y=1,2m, οπότε με απαλοιφή του χρόνου από τις εξισώσεις (2) και (4) παίρνουμε:

$$y=\frac{g}{2υ_0^2}x^2 \rightarrow υ_0 = x\sqrt{\frac{g}{2y}} = 12\sqrt{\frac{10}{2\cdot 1,2}}m/s = 10\sqrt{6}m/s\,.$$

Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής, μεταξύ ενός σημείου Α στην επιφάνεια του νερού και του σημείου εξόδου Β:



$$p_A + \rho g h_A + \frac{1}{2}\rho \upsilon_A^2 = p_B + \rho g h_B + \frac{1}{2}\rho \upsilon_0^2$$

Όπου όμως η ταχύτητα ροής στο σημείο Α είναι σχεδόν μηδενική και θεωρώντας ότι $h_B=0$, τότε $h_A=h$, $p_B=p_{ατ}$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

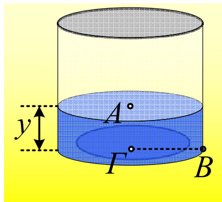
$$p_A + \rho g h = p_B + \frac{1}{2}\rho \upsilon_0^2 \quad (5)$$

$$p_A = p_B + \frac{1}{2}\rho \upsilon_0^2 - \rho g h \rightarrow$$

$$p_A = 10^5 \frac{N}{m^2} + \frac{1}{2}10^3 \cdot \left(10\sqrt{6}\right)^2 \frac{N}{m^2} - 10^3 \cdot 10 \cdot 0{,}8 \frac{N}{m^2} = 3{,}92 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$$

ii) Καθώς θα εξέρχεται νερό από την τρύπα κοντά στη βάση του δοχείου, η επιφάνεια του νερού στο δοχείο θα κατεβαίνει, οπότε θα μειώνεται η πίεση του εγκλωβισμένου αέρα (ισόθερμη μεταβολή), ενώ ταυτόχρονα θα μειώνεται το ύψος h, αλλά τότε από την εξίσωση (5) θα μειώνεται και η ταχύτητα εκροής του νερού υ. Ενώ όμως το χρονικό διάστημα πτώσης, όπως προκύπτει από την σχέση (4), θα παραμένει σταθερό, θα μειώνεται η οριζόντια απόσταση στην οποία θα φτάνει στο έδαφος.

iii) Με βάση τα προηγούμενα, κάποια στιγμή θα μηδενιστεί η ταχύτητα εκροής του νερού, ενώ στο δοχείο θα υπάρχει νερό σε ύψος y. Προφανώς το νερό βρίσκεται σε υδροστατική ισορροπία, οπότε:



$$p_Γ = p_B = p_{ατ} \rightarrow$$

$$p'_A + \rho g y = p_{ατ}$$

Ερχόμαστε τώρα στον αέρα που έχει εγκλωβιστεί πάνω από το νερό. Το αέριο εκτονώνεται ισόθερμα, οπότε από το νόμο του Boyℓe παίρνουμε:

$$p_A V_{αρχ} = p'_A V_{τελ} \rightarrow$$

$$p_A A(a-h) = p'_A A(a-y) \rightarrow$$

$$p_A(a-h) = (p_{ατ} - \rho g y)(a-y) \rightarrow$$

$$3{,}92 \cdot 10^5 \cdot 0{,}2 = \left(10^5 - 10^3 \cdot 10y\right)(1-y) \rightarrow$$

$$y^2 - 11y + 2{,}16 = 0 \rightarrow$$

$y_1=10{,}8m$ απορρίπτεται ή $y_2=0{,}2m$ δεκτή τιμή.

Αλλά τότε η πίεση του αέρα, τη στιγμή που σταματά η εκροή θα είναι:

$$p'_A = p_{ατ} - \rho g y = 10^5 \frac{N}{m^2} - 10^3 \cdot 10 \cdot 0{,}2 \frac{N}{m^2} = 0{,}98 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$$

iv) Ο όγκος του νερού που χύθηκε είναι:

$$\Delta V = V_{\alpha\rho\chi} - V_{\tau\varepsilon\lambda} = Ah - Ay = A(h-y) \rightarrow$$

$$\Delta V = 0{,}3 \cdot (0{,}8 - 0{,}2)m^3 = 0{,}18m^3$$

dmargaris@gmail.com