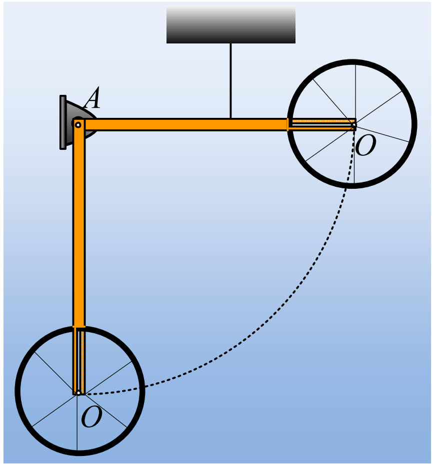
Η κινητική ενέργεια ενός τροχού.



Ο άξονας ενός τροχού ακτίνας R και μάζας m έχει στερεωθεί στο άκρο Ο μιας ομογενούς ράβδου ΑΟ, η οποία μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο της Α. Η ράβδος έχει μήκος l=4R και μάζα Μ και ισορροπεί οριζόντια, κρεμασμένη στο άκρο νήματος, το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί στο ταβάνι. Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα και η ράβδος (παρασύροντας και τον τροχό…) αρχίζει να περιστρέφεται και μετά από λίγο γίνεται κατακόρυφη. Στη θέση αυτή η ράβδος έχει γωνιακή ταχύτητα ω.

i) Αν ο τροχός είναι «καρφωμένος» στο άκρο Ο, χωρίς δυνατότητα να περιστραφεί γύρω από τον άξονά του, τότε φτάνοντας στην κατακόρυφο έχει κινητική ενέργεια:

α) $K= ½\, mR^2\omega^2$, β) $K=8\cdot mR^2\omega^2$, γ) άλλη τιμή.

ii) Αν ο τροχός είναι ελεύθερος να περιστραφεί γύρω από άξονα που περνά από το Ο ενώ αρχικά δεν στρέφεται, τότε μόλις φτάσει στην κατακόρυφο έχει κινητική ενέργεια:

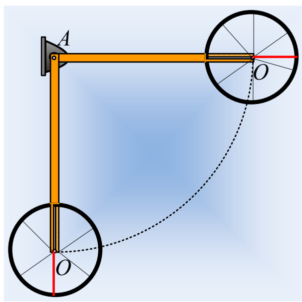
α) $K= ½\, mR^2\omega^2$, β) $K=8\cdot mR^2\omega^2$, γ) άλλη τιμή.

iii) Αν ο τροχός στην οριζόντια θέση στρέφεται με κινητική ενέργεια K_o, τότε φτάνοντας στην κατακόρυφο θέση έχει κινητική ενέργεια:

α) $K=K_o$, β) $K=K_o+ 8\, mR^2\omega^2$, γ) άλλη τιμή.

Δίνεται ότι η μάζα του τροχού είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στην περιφέρειά του.

Απάντηση:



i) Από τη στιγμή που ο τροχός είναι «καρφωμένος» χωρίς να έχει τη δυνατότητα ιδιοπεριστροφής γύρω από το κέντρο του Ο, έχουμε **ένα στερεό s** (ράβδος-τροχός), το οποίο περιστρέφεται γύρω από τον άξονα, στο άκρο Α. Η ροπή αδράνειας του στερεού αυτού είναι:

$$I_s=I_\rho+I_\tau=I_\rho+\left(mR^2+m\ell^2\right)=I_\rho+17mR^2$$

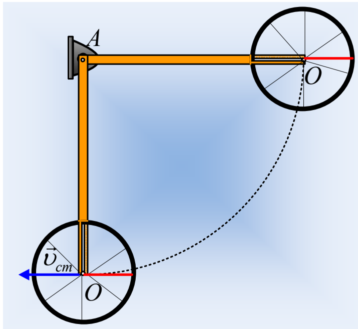
λόγω Steiner.

Η κινητική ενέργεια εξάλλου του στερεού s στην κατακόρυφη θέση είναι:

$$K_s=\frac{1}{2}I_s\omega^2=\frac{1}{2}I_\rho\omega^2+\frac{1}{2}17mR^2\cdot\omega^2$$

Ο πρώτος προσθετέος μας δίνει την κινητική ενέργεια της ράβδου και ο δεύτερος την κιντική ενέργεια του τροχού $K_{\tau} = \frac{1}{2} I_{\tau,A} \cdot \omega^2 = 8{,}5mR^2\omega^2$. Σωστό το γ).

Αξίζει να προσεχθεί το σχήμα. Η ράβδος στρέφεται κατά π/2, αλλά κατά την ίδια γωνία στρέφεται και μια ακτίνα του τροχού (η κόκκινη).



ii) Αν ο τροχός έχει τη δυνατότητα να περιστραφεί γύρω από τον άξονά του Ο, τότε **ΔΕΝ** αποτελεί ένα στερεό με τη ράβδο. Έχουμε απλά ένα σύστημα σωμάτων. Αλλά στη διάρκεια της πτώσης, δεν ασκείται κάποια ροπή ως προς τον άξονα ιδιοπεριστροφής του τροχού (κάθετο στο επίπεδο του σχήματος που περνά από το κέντρο του Ο), συνεπώς η κίνηση του τροχού είναι μεταφορική, χωρίς να αλλάζει ο προσανατολισμός του. Στο σχήμα η κόκκινη ακτίνα είναι πάντα οριζόντια!

Με αποτέλεσμα η κινητική του ενέργεια στην κατώτερη θέση της τροχιάς να είναι:

$$K_{\tau} = \frac{1}{2} m\upsilon_{cm}^2 = \frac{1}{2} m\omega^2\ell^2 = \frac{1}{2} 16mR^2\omega^2 = 8mR^2\omega^2$$

Σωστό το β).

iii) Στην περίπτωση τώρα που αρχικά περιστρέφεται ο τροχός με κάποια γωνιακή ταχύτητα ω_0, με βάση τα προηγούμενα, θα διατηρήσει την ίδια γωνιακή ταχύτητα ιδιοπεριστροφής και στην κατώτερη θέση θα έχει κινητική ενέργεια:

$$K_{\tau} = \frac{1}{2} m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_o\omega_0^2 = K_o + \frac{1}{2} m\omega^2\ell^2 = K_o + \frac{1}{2} 16mR^2\omega^2 = K_o + 8mR^2\omega^2$$

Σωστό το β).

dmargaris@gmail.com