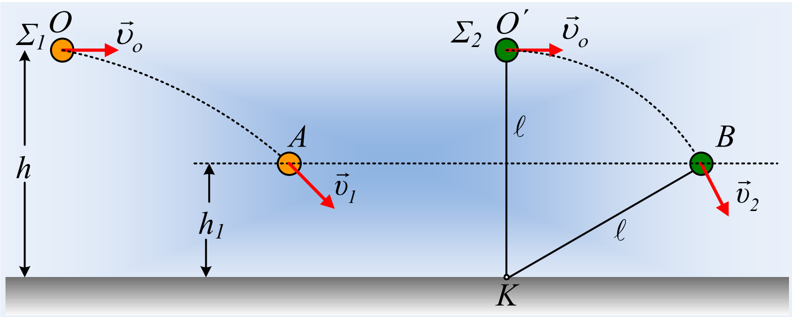
Δυο «παρόμοιες» κινήσεις

Μια σφαίρα $Σ_1$ μάζας m=0,2kg εκτοξεύεται οριζόντια από ένα σημείο Ο, το οποίο βρίσκεται σε ύψος h=2m από το έδαφος, με αρχική ταχύτητα μέτρου $υ_o$=5m/s.

Μια δεύτερη όμοια σφαίρα $Σ_2$ είναι δεμένη στο άκρο αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους l=2m, το άλλο άκρο του οποίου δένεται στο έδαφος, στο σημείο Κ. Η σφαίρα $Σ_2$ φέρεται στο σημείο Ο΄ σε ύψος h με το νήμα κατακόρυφο και εκτοξεύεται οριζόντια με την ίδια ταχύτητα $υ_o$, εκτελώντας κυκλική κίνηση ακτίνας R=l.



i) Να υπολογιστεί η αρχική επιτάχυνση κάθε σφαίρας, αμέσως μετά την εκτόξευση, καθώς και η τάση του νήματος τη στιγμή αυτή.

ii) Μετά από λίγο η πρώτη σφαίρα περνάει από το σημείο Α, σε ύψος h_1=0,8m.

α) Να υπολογιστεί το μέτρο της ταχύτητας $υ_1$, καθώς και η επιτάχυνσης της σφαίρας.

β) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας στη θέση αυτή;

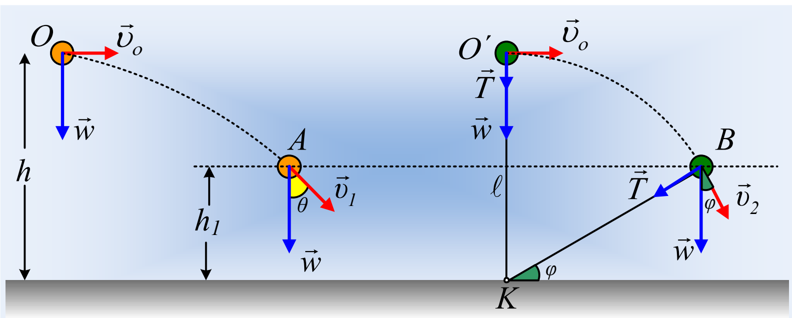
iii) Αντίστοιχα και η σφαίρα $Σ_2$ φτάνει στη θέση Β σε ύψος h_1 από το έδαφος, κάποια στιγμή.

α) Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητάς της $υ_2$, καθώς και η τάση του νήματος στη θέση αυτή.

β) Ποιος ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας $Σ_2$ στη θέση Β;

Δίνεται g=10m/s^2, ενώ η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Απάντηση:



i) Η μόνη δύναμη που ασκείται στη σφαίρα $Σ_1$ είναι το βάρος, οπότε αποκτά κατακόρυφη επιτάχυνση $α_1$=g= 10m/s^2. Αντίθετα στην $Σ_2$ εκτός του βάρους ασκείται και η τάση του νήματος Τ (άγνωστη προς το παρόν…). Όμως η δεύτερη σφαίρα εκτελεί κυκλική κίνηση και στην ανώτερη θέση και δυο παραπάνω δυνάμεις κατευθύνονται προς το κέντρο Κ της κυκλικής τροχιάς, οπότε η επιτάχυνση που προκαλούν είναι κεντρομόλος επιτάχυνση μέτρου:

$$\alpha_2 = \frac{\upsilon_o^2}{R} = \frac{5^2}{2} m/s^2 = 12{,}5 m/s^2.$$

Αλλά τότε από το 2ο νόμο του Νεύτωνα (κεντρομόλος δύναμη) παίρνουμε:

$$\Sigma F = m\alpha_2 \rightarrow T + w = m\frac{\upsilon_o^2}{R} \rightarrow$$

$$T = m\frac{\upsilon_o^2}{R} - mg = 0{,}2 \cdot 12{,}5N - 0{,}2 \cdot 10N = 0{,}5N$$

Αξίζει να τονισθεί ότι η Σ_2 που είναι δεμένη με το νήμα, δέχεται δύναμη και από το νήμα, με αποτέλεσμα να αποκτά μεγαλύτερη αρχική επιτάχυνση (σε σχέση με την Σ_1).

ii) Εφαρμόζουμε την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για την κίνηση της Σ_1 από το Ο στο σημείο Α, παίρνοντας μηδενική τη δυναμική ενέργεια στο έδαφος (προφανώς το επίπεδο όπου U=0, ορίζεται αυθαίρετα, άρα θα μπορούσαμε να ορίσουμε οποιοδήποτε και συνήθως λαμβάνεται αυτό που περνά από το Α…):

α) $K_o + U_o = K_A + U_A \rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 + mgh = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + mgh_1 \rightarrow$

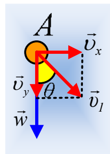
$$\frac{1}{2}m\upsilon_o^2 + mg(h - h_1) = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 \quad (1)$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_o^2 + 2g(h - h_1)} = \sqrt{5^2 + 2 \cdot 10 \cdot (2 - 0{,}8)} m/s = 7 m/s$$

(Η σχέση (1) ουσιαστικά μας λέει ότι …καταλήξαμε να παίρνουμε μηδενική τη δυναμική ενέργεια στη θέση Α…)

Εξάλλου στη σφαίρα ασκείται και πάλι μόνο το βάρος, οπότε έχει ξανά κατακόρυφη επιτάχυνση ίση με g. Ας θυμηθούμε ότι η κίνηση είναι οριζόντια βολή…

β) Η ταχύτητα υ_1 μπορεί να αναλυθεί σε δυο συνιστώσες, μια οριζόντια $\upsilon_x = \upsilon_0$ και μια κατακόρυφη υ_y, μέτρου:



$$\upsilon_y = \sqrt{\upsilon_1^2 - \upsilon_x^2} = \sqrt{\upsilon_1^2 - \upsilon_o^2} = \sqrt{7^2 - 5^2} m/s = 2\sqrt{6} m/s$$

Αλλά τότε ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας είναι:

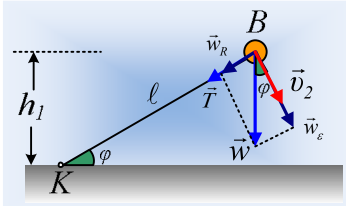
$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW}{dt} = \frac{w \cdot ds \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{dt} = mg \cdot \upsilon_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = mg \cdot \upsilon_y \rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = mg \cdot \upsilon_y = 0{,}2 \cdot 10 \cdot 2\sqrt{6} J/s = 4\sqrt{6} J/s \approx 9{,}8 J/s$$

Ο παραπάνω ρυθμός, είναι ίσος με την ισχύ του βάρους $P = mg \cdot \upsilon_y$, αφού εξαιτίας της συνιστώσας υ_x το βάρος δεν παράγει έργο (δύναμη κάθετη στη μετατόπιση, άρα και στην ταχύτητα).

iii) α) Και για την κυκλική κίνηση της σφαίρας Σ_2 ισχύει η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας η οποία θα οδηγήσει ξανά στη σχέση (1), από όπου θα βρούμε πάλι ότι υ_2=7m/s! Δεν έχει καμιά σημασία το είδος της τροχιάς, το βάρος είναι συντηρητική δύναμη, οπότε το έργο του δεν εξαρτάται από τη διαδρομή αλλά είναι ίσο με $W=mg(h-h_1)$.

Αναλύουμε το βάρος σε δυο συνιστώσες, όπως στο σχήμα, όπου η μια να έχει τη διεύθυνση της ακτίνας και η άλλη τη διεύθυνση της εφαπτόμενης του κύκλου, συνεπώς τη διεύθυνση και της ταχύτητας υ_2. Στη διεύθυνση της ακτίνας η συνισταμένη δύναμη «παίζει τον ρόλο» της κεντρομόλου, οπότε:



$$\Sigma F_R = m\alpha_\kappa \rightarrow T + w_R = m\frac{\upsilon_2^2}{R} \quad (2)$$

Αλλά $w_R = w \cdot \eta\mu\varphi = mg \cdot \frac{h_1}{\ell}$, οπότε η (2) μας δίνει:

$$T = m\frac{\upsilon_2^2}{R} - w_R = m\frac{\upsilon_2^2}{R} - mg \cdot \frac{h_1}{\ell} = \frac{m}{\ell}\left(\upsilon_2^2 - gh_1\right) \rightarrow$$

$$T = \frac{m}{\ell}\left(\upsilon_2^2 - gh_1\right) = \frac{0{,}2}{2}\left(7^2 - 10 \cdot 0{,}8\right)N = 4{,}1N$$

β) Στο ερώτημα ii) β) αναλύσαμε την ταχύτητα σε δυο συνιστώσες και πήραμε τη συνιστώσα της που είχε την διεύθυνση του βάρους, αφού η δύναμη η κάθετη στην ταχύτητα, δεν παράγει έργο. Εδώ θα κάνουμε το αντίστροφο. Αναλύουμε το βάρος, αφού η συνιστώσα w_R ως κάθετη στην ταχύτητα δεν παράγει έργο, οπότε δεν μεταβάλει την κινητική ενέργειας. Έργο παράγει τώρα η συνιστώσα w_ε και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας θα είναι:

$$\frac{d\square}{dt} = w_\varepsilon \cdot \upsilon_2 = mg \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \upsilon_2$$

Αλλά με τη βοήθεια της τριγωνομετρίας παίρνουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \sqrt{1 - \eta\mu^2\phi} = \sqrt{1 - \left(\frac{h_1}{\ell}\right)^2} = \sqrt{0{,}84}$$

Και με αντικατάσταση έχουμε:

$$\frac{d\square}{dt} = mg \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \upsilon_2 = 0{,}2 \cdot 10 \cdot \sqrt{0{,}84} \cdot 7J/s \approx 12{,}8J/s$$

dmargaris@gmail.com