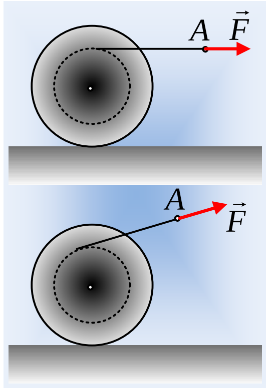
Θα συνεχιστεί η κύλιση;



Ένας λεπτός κυλινδρικός φλοιός ακτίνας R, φέρει σχισμή βάθους y, εντός της οποίας έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα και ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή τραβάμε το άκρο Α του νήματος, ασκώντας του οριζόντια δύναμη F, όπως στο σχήμα, με αποτέλεσμα ο κύλινδρος να κυλίεται.

i) Το βάθος της σχισμής είναι ίσο με:

$$\text{α)}\ \ y=\frac{1}{4}R\,,\ \ \text{β)}\ \ y=\frac{1}{3}R\,,\ \ \text{γ)}\ \ y=\frac{1}{2}R$$

ii) Χωρίς να μεταβάλουμε το μέτρο της ασκούμενης δύναμης, μεταβάλουμε τη διεύθυνση του νήματος, έτσι ώστε να σχηματίζει γωνία θ με την αρχική διεύθυνση:

α) Ο κύλινδρος θα συνεχίσει να κυλίεται.

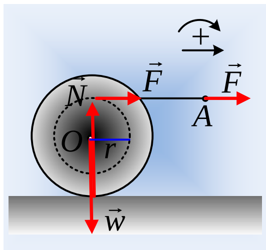
β) Ο κύλινδρος θα πάψει να κυλίεται και θα ολισθήσει.

γ) Ο κύλινδρος θα σπινάρει.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου Ι= ½ MR^2.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κυλινδρικό φλοιό, όπου η ασκούμενη δύναμη F, μεταφέρεται στον κύλινδρο σε απόσταση r από τον άξονά του, όπου y=R-r. Θεωρούμε την κύλιση του κυλινδρικού φλοιού ως σύνθετη, μια μεταφορική και μια περιστροφική γύρω από τον άξονα περιστροφής στο Ο. Με θετική την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική, καθώς και τις δεξιόστροφες ροπές θετικές, εφαρμόζουμε το 2^{ου} νόμο του Νεύτωνα για κάθε κίνηση χωριστά παίρνοντας:

Μεταφορική: $\Sigma\vec{F} = M\vec{a}_{cm} \rightarrow F = Ma_{cm}$ (1)

Στροφική: $\Sigma\tau_o = I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F\cdot r = ½\, MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (2)

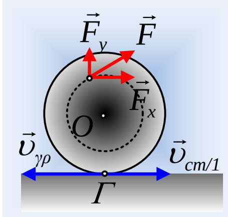
Αλλά από την κύλιση έχουμε ακόμη $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$ (3)

Από τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε:

$$M\alpha_{cm}r=\frac{1}{2}MRa_{cm}\rightarrow r=\frac{1}{2}R$$

Σωστή η γ) πρόταση, αφού $y=R\text{-}r= R-\frac{1}{2}R=\frac{1}{2}R$.

ii) Αναλύουμε τώρα την δύναμη $\vec{F}$ σε οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα και στη συνέχεια δουλεύουμε ξανά όπως παραπάνω, παίρνοντας:



Μεταφορική κίνηση: : $\Sigma\vec{F} = M\vec{a}_{cm/1} \rightarrow F_x = Ma_{cm/1}$ (1α)

Στροφική: $\Sigma\tau_o = I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F\cdot r = ½\, MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu/1}$ (2α)

Από την σύγκριση των (1) και (1$^{\alpha}$), αφού F_x<F προκύπτει ότι η νέα επιτάχυνση του κέντρου μάζας $\alpha_{cm/1}$ θα είναι μικρότερη της αρχικής επιτάχυνσης α_{cm}.

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι η αλλαγή στη διεύθυνση του νήματος έγινε τη στιγμή t_1, κάθε επόμενη χρονική στιγμή t, το κέντρο μάζας Ο θα έχει ταχύτητα προς τα δεξιά, μέτρου:

$$\upsilon_{cm/1} = \upsilon_1 + \alpha_{cm/1}(t-t_1) \quad (4)$$

όπου υ_1 η ταχύτητα του κέντρου μάζας τη στιγμή αλλαγής της διεύθυνσης του νήματος. Εξάλλου από την σύγκριση των σχέσεων (2) και (2$^{\alpha}$) προκύπτει ότι $\alpha_{\gamma\omega\nu/1}=\alpha_{\gamma\omega\nu}$, πράγμα που σημαίνει ότι η αλλαγή της διεύθυνσης του νήματος, δεν μετέβαλε τη γωνιακή επιτάχυνση του στερεού μας. Πράγμα άλλωστε αναμενόμενο, αφού η ροπή της δύναμης δεν μετεβλήθη…

Ας έρθουμε τώρα στο σημείο επαφής του κυλίνδρου με το επίπεδο, στο σημείο Γ. Αυτό θα έχει μια ταχύτητα $\upsilon_{cm/1}$ με φορά προς τα δεξιά και μια $\upsilon_{\gamma\rho}$ εξαιτίας της κυκλικής κίνησης γύρω από το Ο, με φορά προς τα αριστερά και μέτρο:

$$\upsilon_{\gamma\rho} = \omega\cdot R = \left(\omega_1 + a_{\gamma\omega\nu}(t-t_1)\right)R = \omega_1 R + a_{\gamma\omega\nu}R(t-t_1) \rightarrow$$

$$\upsilon_{\gamma\rho} = \upsilon_1 + a_{cm}(t-t_1) \quad (5)$$

Από την σύγκριση των (4) και (5) προκύπτει ότι $\upsilon_{\gamma\rho}$>υ_{cm} κάθε στιγμή (μετά την αλλαγή της διεύθυνσης του νήματος) και ο κυλινδρικός φλοιός σπινάρει.

Σωστή η γ) πρόταση.

dmargaris@gmail.com