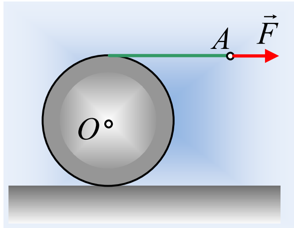
Μια κύλιση με μεταβλητή επιτάχυνση.



Γύρω από έναν τροχό, μάζας m=20kg και ακτίνας R=0,6m, ο οποίος βρίσκεται ακίνητος σε οριζόντιο επίπεδο, έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα. Σε μια στιγμή $t_0=0$, ασκούμε στο άκρο του νήματος Α, μια οριζόντια δύναμη F το μέτρο της οποίας μεταβάλλεται με το χρόνο, σύμφωνα με την εξίσωση F=0,9t (μονάδες στο S.I.). Ο τροχός αρχίζει να κυλίεται και τη στιγμή t΄=10s σταματάμε να τραβάμε το νήμα και να ασκούμε δύναμη.

i) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου Ο του τροχού σε συνάρτηση με το χρόνο και να κάνετε τη γραφική της παράσταση, μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2=12s$.

ii) Να υπολογιστεί η στροφορμή του τροχού κατά (ως προς) τον άξονα περιστροφής του τροχού ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του Ο, τις χρονικές στιγμές:

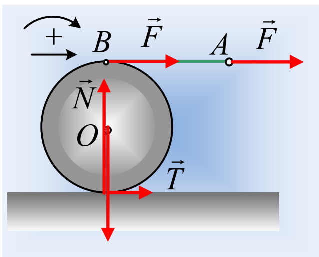
α) $t_1=5s$ και β) $t_2=12s$.

iii) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του τροχού κατά (ως προς) τον άξονα περιστροφής του τροχού ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του Ο, τις παραπάνω χρονικές στιγμές.

iv) Πόση ενέργεια μεταφέρθηκε στον τροχό μέσω της ασκούμενης δύναμης F και ποια η ισχύς της δύναμης τη στιγμή t_1;

Δίνεται η ροπή αδράνειας ως προς κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο του $I= ½\, mR^2$.

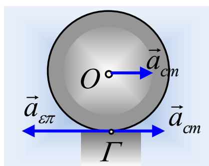
Απάντηση:



Ο τροχός κυλίεται, χωρίς να αναφέρεται αν το επίπεδο είναι ή όχι λείο. Έστω λοιπόν ότι είναι λείο, με αποτέλεσμα τόσο η επιτάχυνση του κέντρου μάζας όσο και η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού να οφείλεται στη δράση της δύναμης F, η οποία μεταφέρεται μέσω του νήματος και ασκείται στον τροχό στο σημείο Β. Θεωρούμε την κύλιση σαν σύνθετη κίνηση, μια μεταφορική με επιτάχυνση $α_{cm}$ και μια στροφική γύρω από τον άξονα που περνά από το κέντρο Ο του τροχού. Θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση, καθώς και την ωρολογιακή φορά περιστροφής ως θετικές, έχουμε:

$$ΣF_x=m·α_{cm} \rightarrow F=m·α_{cm} \ (1)$$

$$Στ=I·α_{γων} \rightarrow F·R = ½\, mR^2·α_{γων} \rightarrow F= ½\, m\, (Rα_{γων}) \ (2)$$



Προφανώς δεν μπορούν να ισχύουν ταυτόχρονα οι (1) και (2), αφού αν εστιάσουμε στο σημείο επαφής Γ του τροχού με το έδαφος, έχει μια επιτάχυνση λόγω μεταφορικής κίνησης $α_{cm}$ και μια επιτρόχια επιτάχυνση

$\alpha_{\varepsilon\pi}=\alpha_{\gamma\omega\nu}R=2F/m=2\ \alpha_{cm}$, συνεπώς το σημείο Γ έχει επιτάχυνση προς τα αριστερά και ο τροχός θα σπινάρει. Για να μην συμβεί αυτό πρέπει να μειωθεί η γωνιακή επιτάχυνση και αυτό θα συμβεί αν ασκηθεί στον τροχό μια αντιωρολογιακής φοράς ροπή, η οποία να έχει αντίθετη φορά από τη ροπή της F. Αυτό γίνεται αν η τριβή έχει φορά προς τα δεξιά, όπως στο παραπάνω σχήμα.

i) Ερχόμενοι ξανά στους νόμους του Νεύτωνα και λαμβάνοντας υπόψη την ασκούμενη τριβή, οι εξισώσεις (1) και (2) γίνονται:

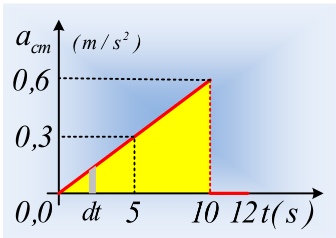
$$\Sigma F_x=m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow F+T=m\cdot\alpha_{cm} \quad (1^{\alpha})$$

$$\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F\cdot R-TR = \tfrac{1}{2}\, mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F-T= \tfrac{1}{2}\, m\ (R\alpha_{\gamma\omega\nu}) \quad (2^{\alpha})$$

Αλλά λόγω κύλισης $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}R$ και με πρόσθεση των (1^{α}) και (2^{α}) παίρνουμε:

$$2F=\frac{3}{2}ma_{cm} \rightarrow a_{cm}=\frac{4F}{3m}=\frac{4\cdot 0{,}9t}{3\cdot 20}=0{,}06t \quad \text{(S.I.) με } 0\le t\le 10\text{s}.$$

Μόλις σταματήσει να ασκείται η δύναμη F (t >10s), παύει να ασκείται και τριβή και ο τροχός κυλίεται πια με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Έτσι η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης, έχει τη μορφή του διπλανού σχήματος.



ii) Από τον ορισμό της επιτάχυνσης έχουμε ότι;

$$a_{cm}=\frac{d\upsilon_{cm}}{dt} \rightarrow d\upsilon_{cm}=a_{cm}\cdot dt \rightarrow$$

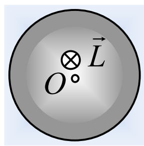
Αν πάρουμε δηλαδή μια απειροελάχιστη μεταβολή του χρόνου dt τότε το γινόμενο $\alpha_{cm}\cdot dt$, ίσο με το εμβαδόν του γκρι χωρίου στο παραπάνω σχήμα, είναι ίσο με τη μεταβολή της ταχύτητας, στο παραπάνω χρονικό διάστημα. Αλλά τότε στο διάστημα από 0-5s η μεταβολή της ταχύτητας είναι ίση με το εμβαδόν του αντίστοιχου τριγώνου, δηλαδή:

$$\Delta\upsilon=\upsilon_1-0=\frac{1}{2}5\cdot 0{,}3m/s \rightarrow \upsilon_1=0{,}75m/s$$

Οπότε η στροφορμή του τροχού τη στιγμή t_1 κατά (ως προς) τον άξονα περιστροφής του είναι οριζόντια με φορά προς τα μέσα (κάθετη στο επίπεδο του σχήματος) με μέτρο:

$$L_1=I\omega_1=\frac{1}{2}mR^2\omega=\frac{1}{2}mR\upsilon_1=\frac{1}{2}20\cdot 0{,}6\cdot 0{,}75kgm^2/s=4{,}5kgm^2/s.$$

Με την ίδια λογική η ταχύτητα τη στιγμή t_2=12s, ίση με την ταχύτητα τη στιγμή t΄=10s, αριθμητικά ίση με το εμβαδόν του κίτρινου τριγώνου έχει μέτρο:



$$\upsilon_2=\frac{1}{2}10\cdot 0{,}6m/s \rightarrow \upsilon_2=3m/s$$

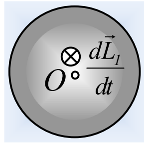
Και η αντίστοιχη στροφορμή, με την ίδια κατεύθυνση και μέτρο:

$$L_2=I\omega_2=\frac{1}{2}mR^2\omega_2=\frac{1}{2}mR\upsilon_2=\frac{1}{2}20\cdot 0{,}6\cdot 3kgm^2/s=18kgm^2/s.$$

iii) Από την εξίσωση (1[α]) παίρνουμε:

$$F+T=m\cdot a_{cm} \quad \rightarrow T=ma_{cm}-F=20\cdot 0{,}06t-0{,}9t=0{,}3t \ \text{(S.I.)}$$

Αλλά τότε τη στιγμή t_1=5s έχουμε:



$$\frac{dL_1}{dt}=\Sigma\tau=F\cdot R-T\cdot R=(F-T)R=(0{,}9t-0{,}3t)R=0{,}6t\cdot R\rightarrow$$

$$\frac{dL_1}{dt}=0{,}6t\cdot R=0{,}6\cdot 5\cdot 0{,}6kgm^2/s^2=1{,}8kgm^2/s^2.$$

Με διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα μέσα.

Εξάλλου μετά τη στιγμή t΄=10s που μηδενίζεται η δύναμη, μηδενίζεται και η τριβή, οπότε δεν ασκείται κάποια ροπή στον τροχό και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του είναι μηδενικός.

iv) Εφαρμόζουμε για τον τροχό το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από 0-10s:

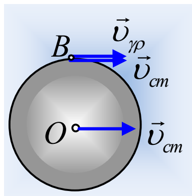
$$K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}=W_w+W_N+W_T+W_F$$

Όμως $K_{\alpha\rho\chi}=0$, όπως και $W_w=W_N=0$ αφού οι δυνάμεις είναι κάθετες στη μετατόπιση, ενώ $W_T=0$ αφού πρόκειται για **στατική τριβή**, η οποία ασκείται σε σημείο του τροχού με μηδενική ταχύτητα ή αν προτιμάτε δεν μετακινείται το σημείο εφαρμογής της, οπότε:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}I\omega_2^2=W_F\rightarrow$$

Όπου $\upsilon_{cm}=\omega_2 R$ και με αντικατάσταση:

$$W_F=\frac{1}{2}m\upsilon_2^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\omega_2^2=\frac{3}{4}m\upsilon_2^2=\frac{3}{4}20\cdot 3^2J=135J$$



Για να βρούμε την ισχύ της δύναμης τη στιγμή t_1, βρίσκουμε την ταχύτητα του σημείου Β, σημείου που ασκείται η δύναμη F στον τροχό.

Το σημείο αυτό έχει λόγω μεταφορικής κίνησης ταχύτητα $\upsilon_{cm}=0{,}75m/s$ και λόγω στροφικής κίνησης, μια γραμμική ταχύτητα $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega_1 R$. Συνεπώς $\upsilon_B=2\upsilon_{cm}$=1,5m/s. Οπότε η ισχύς της δύναμης, η οποία τη στιγμή αυτή έχει μέτρο F_1=0,9·5N=4,5N, είναι ίση:

$$P_F=F_1\cdot\upsilon_B=4{,}5\cdot 1{,}5W=6{,}75W$$

Σχόλια:

1) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του τροχού τη στιγμή t_1 θα μπορούσε να βρεθεί ως εξής:

$$\frac{dL_1}{dt}=\frac{d(I\omega)}{dt}=I\cdot a_{\gamma\omega\nu}=\frac{1}{2}mR^2\cdot a_{\gamma\omega\nu}=\frac{1}{2}mR\cdot a_{cm}=1{,}8kgm^2/s^2.$$

2) Θα μπορούσαμε εξάλλου να υπολογίσουμε την ισχύ της δύναμης την ίδια στιγμή, παίρνοντας τις επιμέρους τιμές της για μεταφορική και περιστροφική κίνηση. Έτσι θα είχαμε:

$$P_F = F_1 \cdot \upsilon_{cm} + \tau_F \cdot \omega = F_1 \cdot \omega_1 R + F_1 R \cdot \omega_1 = 2F_1 R \cdot \omega_1 = 6{,}75W$$

3) Με την ίδια λογική, κάθε στιγμή, η ισχύς της τριβής είναι ίση:

$$P_T = T \cdot \upsilon_{cm} - \tau_T \cdot \omega = T \cdot \omega R - TR \cdot \omega = 0$$

Συνεπώς εξαιτίας της **στατικής** τριβής, ούτε δίνεται ούτε αφαιρείται ενέργεια στον τροχό, λέγοντας ότι το έργο της στατικής τριβής είναι μηδενικό. Θα μπορούσαμε απλά να δούμε την στατική τριβή, σαν ένα «μετατροπέα» ο οποίος αφαιρεί περιστροφική κινητική ενέργεια, μετατρέποντάς την σε μεταφορική.

dmargaris@gmail.com