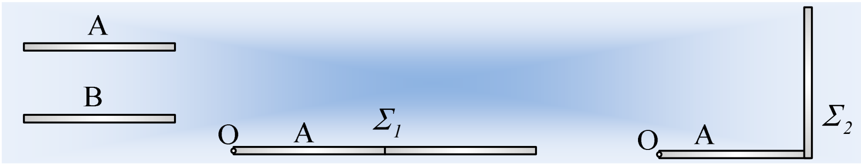
Λυγίζοντας τα γόνατα…

Δυο όμοιες λεπτές ομογενείς ράβδοι Α και Β, μάζας m και μήκους l, συνδέονται με τους δυο τρόπους που φαίνονται στο σχήμα σχηματίζοντας τα στερεά $Σ_1$ και $Σ_2$.



Τα δυο στερεά μπορούν να περιστρέφονται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, ο οποίος περνά από το άκρο Ο της Α ράβδου. Εκτρέπουμε τα στερεά, ώστε η ράβδος Α να γίνει οριζόντια και τα αφήνουμε να περιστραφούν.

i) Για τις ροπές αδράνειας I_1 και I_2 των στερεών $Σ_1$ και $Σ_2$ αντίστοιχα, ισχύει:

α) $I_1 < I_2$, β) $I_1 = I_2$, γ) $I_1 > I_2$.

ii) Για τα μέτρα των ροπών που δέχονται τα δύο στερεά, αμέσως μόλις αφεθούν ελεύθερα να περιστραφούν, ισχύει:

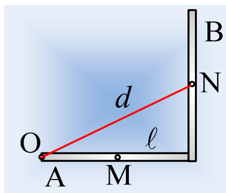
α) $τ_1 < τ_2$, β) $τ_1 = τ_2$, γ) $τ_1 > τ_2$.

iii) Αν η ροπή αδράνειας της ράβδου Α ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της, δίνεται από την εξίσωση $I_{cm} = \frac{1}{12} m\ell^2$, για τα αντίστοιχα μέτρα των αρχικών γωνιακών επιταχύνσεων των δύο στερεών, αμέσως μόλις αφεθούν ελεύθερα να περιστραφούν, ισχύει:

α) $α_{γων1} < α_{γων2}$, β) $α_{γων1} = α_{γων2}$, γ) $α_{γων1} > α_{γων2}$.

Απάντηση:

i) Αν η ροπή αδράνειας κάθε ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της είναι I_{cm}, τότε από το θεώρημα Steiner παίρνουμε:



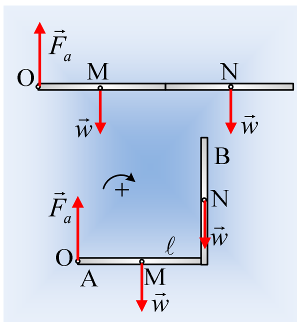
Στερεό $Σ_1$: $I_{O1}=I_1=I_A+I_B=\left(I_{cm}+\frac{m\ell^2}{4}\right)+\left(I_{cm}+m\left(\frac{3\ell}{2}\right)^2\right) \rightarrow$

$$I_1 = 2I_{cm} + \frac{5m\ell^2}{2} \quad (1)$$

Στερεό $Σ_2$: $I_{O2}=I_2=I_A+I_B=\left(I_{cm}+\frac{m\ell^2}{4}\right)+\left(I_{cm}+md^2\right) \rightarrow$

$$I_2 = 2I_{cm} + \frac{m\ell^2}{4} + m\left(\ell^2+\frac{\ell^2}{4}\right) = 2I_{cm} + \frac{3m\ell^2}{2} \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $I_1>I_2$. Σωστό το γ).



ii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα δύο στερεά. Με θετική την ωρολογιακή φορά, παίρνουμε:

$$\tau_{\Sigma_1} = w\cdot\frac{\ell}{2} + w\cdot\frac{3\ell}{2} = 2w\cdot\ell \quad (3)$$

$$\tau_{\Sigma_2} = w\cdot\frac{\ell}{2} + w\cdot\ell = 1{,}5w\cdot\ell \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) παίρνουμε ότι $\tau_{\Sigma_1} > \tau_{\Sigma_2}$. Σωστό είναι το γ).

iii) Με αντικατάσταση στις σχέσεις (1) και (2) της εξίσωσης για την I_{cm} παίρνουμε:

$$I_1 = 2I_{cm} + \frac{5m\ell^2}{2} = 2\cdot\frac{1}{12}m\ell^2 + \frac{5m\ell^2}{2} = \frac{8m\ell^2}{3}$$

$$I_2 = 2I_{cm} + \frac{3m\ell^2}{2} = 2\frac{1}{12}m\ell^2 + \frac{3m\ell^2}{2} = \frac{5m\ell^2}{3}$$

Οπότε από το 2^o νόμο του Νεύτωνα για κάθε στερεό, μόλις αφεθεί να περιστραφεί, έχουμε:

$$\Sigma\tau_1 = I_1 a_{\gamma\omega\nu 1} \rightarrow a_{\gamma\omega\nu 1} = \frac{\tau_{\Sigma_1}}{I_1} = \frac{2w\ell}{\frac{8m\ell^2}{3}} = \frac{6mg\ell}{8m\ell^2} = 0{,}75\frac{g}{\ell} \quad (5)$$

$$\Sigma\tau_2 = I_2 a_{\gamma\omega\nu 2} \rightarrow a_{\gamma\omega\nu 2} = \frac{\tau_{\Sigma_2}}{I_2} = \frac{1{,}5w\ell}{\frac{5m\ell^2}{3}} = \frac{4{,}5mg\ell}{5m\ell^2} = 0{,}9\frac{g}{\ell} \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) προκύπτει ότι $a_{\gamma\omega\nu 2} > a_{\gamma\omega\nu 1}$. Σωστό το α).

Σχόλιο.

Ο τίτλος της ανάρτησης παραπέμπει σε μια πειραματική επίδειξη στο συνέδριο:

«**Διδακτικές προσεγγίσεις και πειραματική διδασκαλία στις Φυσικές Επιστήμες**»

η οποία έγινε από τους συναδέλφους ***Ηλία Καλογήρου*** και ***Αναστάσιο Νέζη*** με θέμα:

Η περιπλάνηση της αδράνειας στα μονοπάτια της καθημερινότητας.

Στους οποίους και αφιερώνεται.

dmargaris@gmail.com