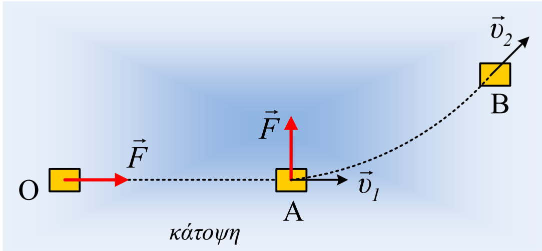
Όταν αλλάζει η κατεύθυνση της δύναμης



Στο σημείο Ο ενός λείου οριζόντιου επιπέδου ηρεμεί ένα σώμα μάζας 10kg. Σε μια στιγμή $t_0=0$, στο σώμα ασκείται μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F=5N, οπότε τη στιγμή $t_1=4s$, το σώμα φτάνει στο σημείο Α, έχοντας ταχύτητα υ_1. Τη στιγμή αυτή η δύναμη αλλάζει κατεύθυνση και γίνεται κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ, παραμένουσα οριζόντια και με σταθερή κατεύθυνση, ενώ διατηρεί σταθερό και το μέτρο της.

i) Να βρεθεί η ταχύτητα υ_1 καθώς και η απόσταση (ΟΑ).

ii) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος υ_2 τη χρονική στιγμή $t_2=8s$.

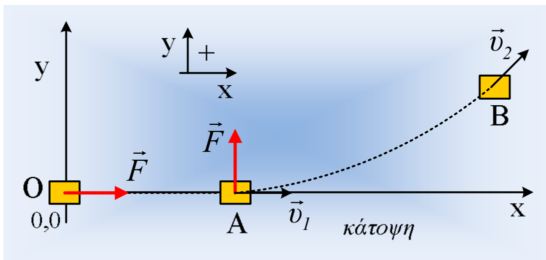
iii) Πόσο απέχει η θέση Β, από την οποία περνά το σώμα τη στιγμή t_2, από την αρχική θέση Ο;

iv) Με ποιο ρυθμό προσφέρει ενέργεια στο σώμα η δύναμη F, στις θέσεις Α (μετά την αλλαγή κατεύθυνσης) και Β;

Απάντηση:

i) Στο χρονικό διάστημα 0-t_1, το σώμα με την επίδραση της δύναμης F (στην κατακόρυφη διεύθυνση το σώμα ισορροπεί και $\vec{w}+\vec{N}=0$), αποκτά σταθερή επιτάχυνση:

$$F=m\alpha \rightarrow \alpha=\frac{F}{m}=\frac{5}{10}m/s^2=0{,}5m/s^2.$$



Οπότε η κίνηση του σώματος είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, για την οποία ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\upsilon=\alpha t \quad \text{και} \quad \Delta x=\frac{1}{2}\alpha t^2$$

Θεωρώντας την αρχική θέση Ο, ως αρχή του συστήματος αξόνων x,y, με αντικατάσταση $t=t_1=4s$, παίρνουμε:

$$\upsilon_1=\alpha t_1=0{,}5\cdot 4m/s=2m/s$$

$$x_1=\frac{1}{2}\alpha t_1^2=\frac{1}{2}0{,}5\cdot 4^2m=4m$$

ii) Για το χρονικό διάστημα $t>t_1$, όπου η δύναμη έχει την κατεύθυνση του άξονα y, μπορούμε να θεωρήσουμε την κίνηση σύνθετη, οπότε από την αρχή της επαλληλίας, θα έχουμε μια ευθύγραμμη ομαλή κίνηση στη διεύθυνση x και μια ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση στη διεύθυνση y, με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $\alpha=0{,}5m/s^2$ (άλλαξε η διεύθυνση της δύναμης, χωρίς να αλλάξει το μέτρο της).

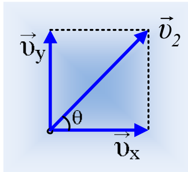
Έτσι θα ισχύουν οι εξισώσεις:

Άξονας x	Άξονας y
$\upsilon_x = \upsilon_1$ (1) $\Delta x = \upsilon_1 \cdot \Delta t$ (2)	$\upsilon_y = \alpha \cdot \Delta t$ (3) $\Delta y = y = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$ (4)

Με αντικατάσταση στην (3) βρίσκουμε:

$$\upsilon_y = \alpha \cdot \Delta t = \alpha \cdot (t_2 - t_1) = 0,5 \cdot (8-4) m/s = 2m/s.$$

Αλλά τότε με βάση το διπλανό σχήμα, η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή t_2 έχει μέτρο:



$$\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} m/s = 2\sqrt{2} m/s$$

Ενώ θ=45°, αφού το παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο και η διαγώνιος διχοτομεί τη γωνία.

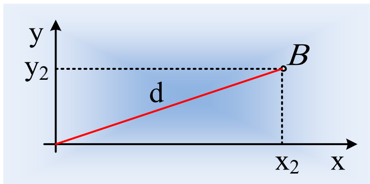
iii) Με αντικατάσταση στις εξισώσεις (2) και (4) παίρνουμε:

$$\Delta x = \upsilon_1 \cdot \Delta t = 2 \cdot 4m = 8m$$

Οπότε $x_B = x_1 + \Delta x = 4m + 8m = 12m$

$$y = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 = \frac{1}{2}0,5 \cdot 4^2 m = 4m$$

Δηλαδή το σώμα περνά από το σημείο Β με συντεταγμένες (x,y)=(12m, 4m), οπότε απέχει από την αρχή Ο των αξόνων απόσταση:



$$d = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{12^2 + 4^2} m = 4\sqrt{10} m$$

iv) Ο ρυθμός με τον οποίο η δύναμη μεταφέρει ενέργεια στο σώμα (στιγμιαία ισχύς της δύναμης) είναι:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cdot dx \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{dt} = F \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

Όπου α η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα του σώματος με την δύναμη.

Έτσι στη θέση Α θα έχουμε:

$$P_1 = F \cdot \upsilon_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = F \cdot \upsilon_1 \cdot \sigma\upsilon\nu 90^o = 0$$

Ενώ στη θέση Β έχουμε:

$$P_2 = F \cdot \upsilon_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = F \cdot \upsilon_2 \cdot \sigma\upsilon\nu 45^o = F \cdot \upsilon_{2y} = 5 \cdot 2 J/s = 10 J/s$$

Σχόλιο:

Η τελευταία εξίσωση $P_2 = F \cdot \upsilon_{2y}$ «διαβάζεται» και με τον εξής τρόπο:

Η ισχύς της δύναμης υπολογίζεται από το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί το μέτρο της συνιστώσας της ταχύτητας, στη διεύθυνσή της.

dmargaris@gmail.com