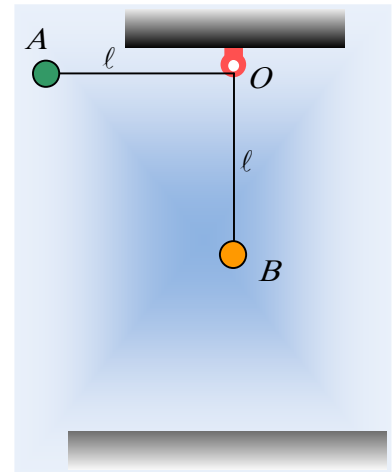


Μια κρούση και η σύνδεση με τα προηγούμενα...

Δύο σφαίρες Α και Β, με μάζες $m_1=2\text{kg}$ και $m_2=3\text{kg}$ αντίστοιχα κρέμονται από το ίδιο σημείο Ο, με νήματα ίδιου μήκους $l=1,25\text{m}$. Το Ο απέχει από το έδαφος απόσταση $2,5\text{m}$. Φέρνουμε την Α σφαίρα στη θέση που δείχνει το διπλανό σχήμα, όπου το νήμα γίνεται οριζόντιο και την αφήνουμε να κινηθεί. Μετά από λίγο οι σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά, ενώ το νήμα που συγκρατεί την σφαίρα Α κόβεται ελάχιστα πριν την κρούση.



i) Να υπολογιστούν οι ταχύτητες της Α σφαίρας ελάχιστα πριν και αμέσως μετά την κρούση.

ii) Να βρεθεί η μέγιστη γωνία εκτροπής του νήματος που συνδέει την σφαίρα Β, με την κατακόρυφη, μετά την κρούση.

iii) Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί το νήμα στην σφαίρα Β:

α) πριν την κρούση, β) αμέσως μετά την κρούση, γ) στη θέση μηδενισμού της ταχύτητάς της.

iv) Σε πόση απόσταση, από την κατακόρυφη που περνά από το Ο, η σφαίρα Α θα κτυπήσει στο έδαφος;

Οι σφαίρες να θεωρηθούν υλικά σημεία αμελητέας ακτίνας, ενώ $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

i) Η σφαίρα Α διαγράφοντας κυκλική τροχιά ακτίνας l , ελάχιστα πριν την κρούση, έχει οριζόντια ταχύτητα \vec{v}_1 , όπως στο σχήμα. Τη στιγμή αυτή το νήμα κόβεται και επακολουθεί κρούση.

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για την κίνηση της σφαίρας Α (αφού η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος) και θεωρώντας $U=0$ στην κατακόρυφη θέση, παίρνουμε:

$$K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} \rightarrow$$

$$0 + m_1 g l = \frac{1}{2} m v_1^2 + 0 \rightarrow v_1 = \sqrt{2gl} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1,25} \text{ m/s} = 5 \text{ m/s}$$

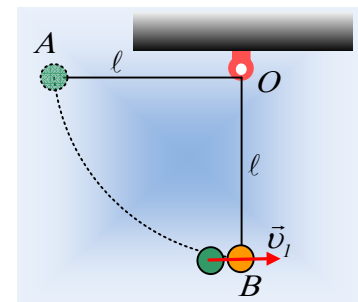
Για τις ταχύτητες μετά την κρούση έχουμε:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \text{ και } v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Με αντικατάσταση, θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, έχουμε:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2 - 3}{2 + 3} 5 \text{ m/s} = -1 \text{ m/s} \text{ και}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2 \cdot 2}{2 + 3} 5 \text{ m/s} = 4 \text{ m/s}$$



- ii) Μετά την κρούση, η Β σφαίρα ξεκινά να διαγράφει μια κυκλική τροχιά ακτίνας ℓ , μέχρι να φτάσει στη θέση Γ, όπου μηδενίζεται στιγμιαία η ταχύτητά της, πριν κινηθεί ξανά προς τα κάτω. Εφαρμόζοντας ξανά τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας ($U_{αρχ}=0$), για τη σφαίρα Β, παίρνουμε:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ}$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + 0 = 0 + m_2 g h \rightarrow h = \frac{v_2'^2}{2g} = \frac{4^2}{2 \cdot 10} m = 0,8 m$$

Αλλά τότε για τη γωνία εκτροπής θ , από το τρίγωνο ΟΓΔ, έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{(O\Delta)}{(O\Gamma)} = \frac{\ell - h}{\ell} = \frac{1,25 - 0,8}{1,25} = \frac{9}{25}$$

- iii) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα στις δύο θέσεις.

α) Πριν την κρούση η σφαίρα ισορροπεί, οπότε:

$$T = w = m_2 g = 3 \cdot 10 N = 30 N$$

β) Αμέσως μετά την κρούση η σφαίρα εκτελεί κυκλική κίνηση και:

$$\Sigma F = m_2 \frac{v_2'^2}{R} \rightarrow T' - m_2 g = m_2 \frac{v_2'^2}{\ell} \rightarrow$$

$$T' = m_2 g + m_2 \frac{v_2'^2}{\ell} = 30 N + 3 \frac{4^2}{1,25} N = 68,4 N$$

γ) Στη θέση Γ, η σφαίρα ισορροπεί στη διεύθυνση του νήματος (προφανώς έχει εφαπτομενική επιτάχυνση εξαιτίας της συνιστώσας w_x του βάρους), οπότε:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow T_I - w_y = 0 \rightarrow$$

$$T_I = m_2 g \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 3 \cdot 10 \cdot \frac{9}{25} N = 10,8 N$$

- iv) Η Α σφαίρα μετά την κρούση αποκτά ταχύτητα v_1' οπότε εκτελεί οριζόντια βολή, για την οποία ισχύουν οι εξισώσεις:

$$v_x = v_1' \quad (1) \quad \text{και} \quad x = v_1' \cdot t \quad (2)$$

$$v_y = g t \quad (3) \quad \text{και} \quad y = \frac{1}{2} g t^2 \quad (4)$$

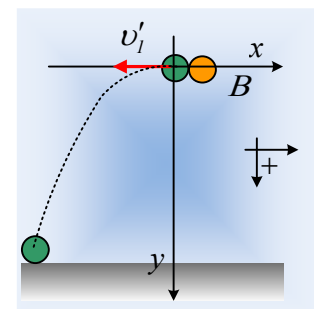
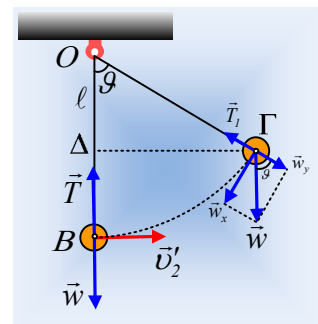
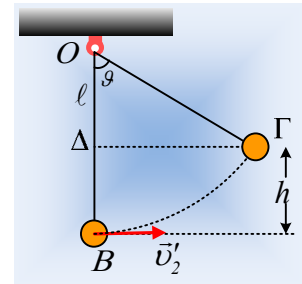
Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος $y = h_1 = 1,25 m$ και με απαλοιφή του χρόνου μεταξύ των (2) και (4) παίρνουμε:

$$x = v_1' t = v_1' \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = -1 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 1,25}{10}} m = -0,5 m$$

Συνεπώς η σφαίρα Α θα κτυπήσει στο έδαφος 0,5m αριστερά της κατακόρυφης που περνά από το Ο.

Σχόλιο.

Στο τελευταίο ερώτημα, πήραμε τους άξονες xy με τον προσανατολισμό που συνήθως χρησιμοποιούμε (θε-



τικά δεξιά και κάτω), παρότι η αρχική ταχύτητα ήταν προς τα αριστερά. Θα μπορούσαμε να πάρουμε θετική την προς τα αριστερά κατεύθυνση, απλά τότε η αρχική ταχύτητα θα ήταν $+1\text{m/s}$.

dmargaris@gmail.com