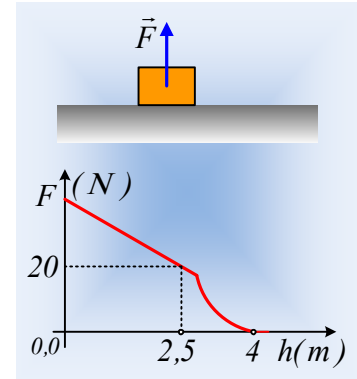


Μια άσκηση «εντός» ύλης

Ένα σώμα ηρεμεί στο έδαφος (θέση Α), όπου η δυναμική του ενέργεια είναι μηδενική. Σε μια στιγμή δέχεται μια κατακόρυφη δύναμη, με φορά προς τα πάνω το μέτρο της οποίας μεταβάλλεται όπως στο διπλανό διάγραμμα. Το σώμα κινείται προς τα πάνω και αποκτά μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα $v_1=5\text{m/s}$ στη θέση Γ, σε ύψος $h_Γ=2,5\text{m}$.

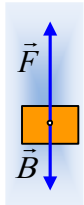


- i) Η κίνηση του σώματος μέχρι τη θέση Γ είναι ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη ή όχι και γιατί;
- ii) Να υπολογιστεί η μάζα του σώματος.
- iii) Να βρεθεί η δυναμική και η κινητική ενέργεια του σώματος στη θέση Γ.
- iv) Πόσο είναι το έργο της δύναμης F , από το έδαφος μέχρι τη θέση Γ;
- v) Η δύναμη F μηδενίζεται στη θέση Δ, σε ύψος $h_Δ=4\text{m}$, έχοντας στη θέση αυτή ταχύτητα προς τα πάνω μέτρου $v_2=2\text{m/s}$. Να βρεθούν:
 - α) Η επιτάχυνση του σώματος στη θέση Δ.
 - β) Το συνολικό έργο της δύναμης F .
 - γ) Το μέγιστο ύψος από το έδαφος στο οποίο θα φτάσει το σώμα.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- i) Η προς τα πάνω κίνηση του σώματος δεν είναι ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη. Αν πάρουμε το σώμα σε μια τυχαία θέση και σχεδιάσουμε τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω του, θα πάρουμε το διπλανό σχήμα. Εφαρμόζοντας το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για το σώμα, θεωρώντας την προς τα άνω κατεύθυνση θετική, έχουμε:



$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \Sigma F = ma \rightarrow F - B = ma \rightarrow F - mg = ma \rightarrow$$

$$\alpha = \frac{F}{m} - g$$

Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι αφού η δύναμη μεταβάλλεται, καθώς το σώμα ανεβαίνει και η επιτάχυνση του σώματος θα μεταβάλλεται. Μάλιστα αφού μειώνεται το μέτρο της δύναμης, θα μειώνεται και το μέτρο της επιτάχυνσης, μέχρι τη θέση που θα μηδενιστεί, ενώ στη συνέχεια η επιτάχυνση θα γίνει αρνητική, πράγμα που σημαίνει ότι ενώ το σώμα θα έχει ταχύτητα προς τα πάνω (θετική), η επιτάχυνση θα έχει φορά προς τα κάτω (αρνητική τιμή) και το σώμα θα επιβραδύνεται.

- ii) Με βάση τα παραπάνω η μέγιστη ταχύτητα του σώματος θα επιτυγχάνεται στη θέση εκείνη που το σώμα, σταματά να επιταχύνεται και θα αρχίσει να επιβραδύνεται. Η θέση αυτή δεν είναι άλλη από τη θέση Γ, όπου μηδενίζεται η επιτάχυνση, συνεπώς στη θέση αυτή:

$$\Sigma F = 0 \rightarrow F - B = 0 \rightarrow mg = F \rightarrow$$

$$m = \frac{F}{g} = \frac{20N}{10\frac{m}{s^2}} = 2kg$$

iii) Το σώμα στη θέση Γ έχει:

$$\text{Κινητική ενέργεια: } K = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}2 \cdot 5^2 J = 25J$$

$$\text{Δυναμική ενέργεια: } U = mgh_\Gamma = 2 \cdot 10 \cdot 2,5J = 50J$$

iv) Εφαρμόζουμε για το σώμα το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από τη θέση Α μέχρι τη θέση Γ, παίρνοντας:

$$K_\Gamma - K_A = W_F + W_B \rightarrow$$

$$K_\Gamma - 0 = W_F - mgh_\Gamma \rightarrow$$

$$W_F = K_\Gamma + mgh_\Gamma = 25J + 50J = 75J$$

Σημείωση: Το σώμα στο έδαφος έχει μηδενική μηχανική ενέργεια. Φτάνοντας στη θέση Γ έχει μηχανική ενέργεια $E_\Gamma = K + U = 75J$. Την ενέργεια αυτή κέρδισε μέσω του έργου της δύναμης F, οπότε το έργο της δύναμης θα είναι ίσο με 75J.

α) Εφαρμόζοντας το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για το σώμα, στη θέση Δ παίρνουμε:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \Sigma F = ma \rightarrow -B = ma \rightarrow a = -g = -10\frac{m}{s^2}.$$

β) Παίρνουμε ξανά για το σώμα το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από τη θέση Α μέχρι τη θέση Δ:

$$K_\Delta - K_A = W_F + W_B \rightarrow$$

$$K_\Delta - 0 = W_F - mgh_\Delta \rightarrow$$

$$W_F = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_\Delta = \frac{1}{2}2 \cdot 2^2 J + 2 \cdot 10 \cdot 4J = 84J$$

γ) Έστω ότι το σώμα σταματά να ανέρχεται στη θέση Ε, όπου μηδενίζεται η ταχύτητά του. Από τη θέση Δ μέχρι τη θέση Ε, η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή, αφού η μόνη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι το βάρος, μια συντηρητική δύναμη, οπότε:

$$K_\Delta + U_\Delta = K_E + U_E \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_\Delta = mgh_E \rightarrow h_E = \frac{v_2^2}{2g} + h_\Delta \rightarrow$$

$$h_E = \frac{v_2^2}{2g} + h_\Delta = \frac{2^2}{2 \cdot 10} m + 4m = 4,2m$$

Σχόλιο:

Θα μπορούσαμε να βρούμε το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα σκεπτόμενοι ενεργειακά. Το σώμα στο έδαφος δεν έχει μηχανική ενέργεια. Παίρνει μέσω του έργου της δύναμης ενέργεια $\Delta E=84\text{J}$, οπότε στο μέγιστο ύψος θα έχει δυναμική ενέργεια 84J. Αλλά τότε:

$$U_{max} = mgh_E \rightarrow h_E = \frac{U_{max}}{mg} = \frac{84}{2 \cdot 10} \text{m} = 4,2\text{m}$$

dmargaris@gmail.com