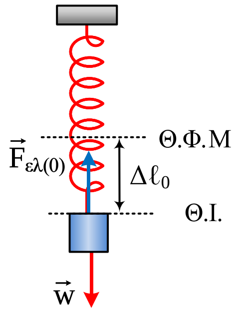
Τσιγκουνιά στα δεδομένα.



Ένα σώμα Σ μάζας m = 1 kg είναι δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k. Με μία δύναμη μεταβλητού μέτρου ανεβάζουμε πολύ αργά το σώμα μέχρι τη θέση όπου το ελατήριο έχει την ίδια αποθηκευμένη ενέργεια με αυτή που είχε όταν ισορροπούσε. Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αφήνουμε το σώμα από την θέση που το είχαμε προηγουμένως ανεβάσει και αυτό εκτελεί ταλάντωση σταθεράς D = k. Η επιτάχυνση του ταλαντούμενου σώματος γίνεται κατά μέτρο ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας για πρώτη φορά την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{30}$ s. Να βρείτε:

α. τον χρόνο που χρειάζεται ώστε να ακινητοποιηθεί το σώμα για πρώτη φορά μετά την έναρξη της ταλάντωσης του

β. την ενέργεια που δαπανήσαμε για να θέσουμε το σώμα σε ταλάντωση

γ. την επιτάχυνση του σώματος (μέτρο και κατεύθυνση) όταν η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι 2,42 J

δ. το μέτρο της μέγιστης μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του σώματος κατά την διάρκεια της ταλάντωσης του.

Δίνεται $g = 10\ m/s^2$, θετική θεωρούμε την φορά προς τα πάνω.

Λύση

α. Η ταλάντωση ξεκινά από το άκρο της ταλάντωσης και ακινητοποιείται στιγμιαία όταν φτάσει στο άλλο άκρο, δηλαδή μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t = \frac{T}{2}$ (1).

Αρχικά το σώμα ισορροπεί με το ελατήριο να έχει επιμήκυνση $\Delta\ell$ που είναι:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow w = F_{ελ} \Rightarrow mg = k\Delta\ell_0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{mg}{k} \quad (2)$$

Για να έχει το ελατήριο έχει την ίδια αποθηκευμένη ενέργεια με αυτή που είχε όταν ισορροπούσε θα πρέπει να έχει την ίδια παραμόρφωση και αφού αρχικά ήταν επιμηκυμένο τώρα θα πρέπει να είναι συσπειρωμένο $\Delta\ell_0$.

Συνεπώς έχουμε ανεβάσει το σώμα $\Delta\ell$ πάνω από το φυσικό του μήκος όπου από εκεί αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα. Η παραπάνω θέση είναι το πάνω άκρο της ταλάντωσης, έτσι έχουμε $A = 2\Delta\ell_0$ (3).

Ξεκινώντας το σώμα την ταλάντωση του δέχεται δύο ομόρροπες δυνάμεις (με φορά προς τα κάτω), αυτή από το ελατήριο και το βάρος του. Η επιτάχυνση του θα είναι: $\vec{\alpha} = \frac{\Sigma\vec{F}}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{w + F_{\varepsilon\lambda}}{m} \Rightarrow \alpha = g + \frac{F_{\varepsilon\lambda}}{m}$ (4), με φορά προς τα κάτω.

Για να έχουμε (φορές έχουμε ήδη ίδιες) $\alpha = g$, θα πρέπει $F_{\varepsilon\lambda} = 0$, δηλαδή το παραπάνω γεγονός συμβαίνει όταν το σώμα περνά από την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι π/2 rad αφού το σώμα την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ βρίσκεται στο θετικό άκρο. Άρα την $t = t_1$ έχουμε $x_1 = +\Delta\ell_0$.

$$x_1 = A\eta\mu(\omega t_1 + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \Delta\ell_0 = 2\Delta\ell_0\eta\mu(\omega\frac{\pi}{30} + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \omega\frac{\pi}{30} + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \ \ (\text{S.I.}) \\ \omega\frac{\pi}{30} + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \ \ (\text{S.I.}) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \omega = 60\kappa - 10 \ \ (\text{S.I.}) \\ \omega = 60\kappa + 10 \ \ (\text{S.I.}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ **ω = 10 rad/s**.

Από την (1) έχουμε: $\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{2\pi}{2\omega} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta t = 0{,}1\pi\, s}$.

β. Η ενέργεια που δαπανήσαμε για να θέσουμε το σώμα σε ταλάντωση είναι ίση με την ενέργεια της ταλάντωσης.

Η σταθερά του ελατηρίου είναι: $k = D = m\omega^2 \Rightarrow$ **k = 100 N/m**.

Από την σχέση (2) έχουμε **$\Delta\ell_0$ = 0,1 m** και από τη σχέση (3) προκύπτει **A = 0,2 m**.

Άρα $W_{\pi\rho o\sigma\varphi.} = E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \boldsymbol{W_{\pi\rho o\sigma\varphi.} = 2\,J}$.

γ. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι: $U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k\Delta\ell_1^2 \Rightarrow \Delta\ell_1 = \sqrt{\frac{2U_{\varepsilon\lambda}}{k}} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta\ell_1 = 0{,}22\,m}$

Το ελατήριο μπορεί να συσπειρώνεται αλλά και να παραμορφώνεται. Η μέγιστη συσπείρωση όμως που υφίσταται είναι $\Delta\ell_0 = 0{,}1$ m (πάνω από την Θ.Φ.Μ.), άρα όταν έχουμε παραμόρφωση 0,22 m, αυτή είναι επιμήκυνση και στο σώμα βρίσκεται κάτω από την θέση ισορροπίας της ταλάντωσης σε απομάκρυνση:

$|x_1| = \Delta\ell_1 - \Delta\ell \Rightarrow |x_1| = 0{,}12\ m \Rightarrow$ **$x_1 = -0{,}12\ m$** (βρισκόμαστε κάτω από την Θ.Ι. και η θετική φορά είναι η προς τα πάνω, άρα: $\alpha_1 = -\omega^2 x_1 \Rightarrow$ **$\alpha_1 = 12\ m/s^2$** και φορά προς τα πάνω.

δ. Οι δύο ακραίες θέσεις της ταλάντωσης διαφέρουν υψομετρικά κατά 2Α, όπου Α το πλάτος της ταλάντωσης. Έτσι η μέγιστη μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας θα είναι:

$\Delta U_{max} = mg2A \Rightarrow$ **$\Delta U_{max} = 4\ J$**.