

2.2. Συμβολή και στάσιμα κύματα. Ομάδα Δ.

2.2.41. Μια χορδή σε ταλάντωση ή δυο στάσιμα κύματα.

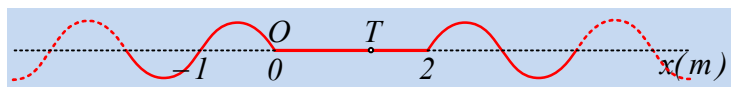
Μια χορδή μήκους 5m είναι στερεωμένη στα άκρα της Κ και Λ. Όταν θέσουμε σε ταλάντωση το μέσον της Μ, απαιτείται χρονικό διάστημα $\Delta t=0,125s$ για να φτάσουν τα τρέχοντα κύματα στα άκρα της. Μετά από λίγο δημιουργείται σταθερή κατάσταση πάνω στη χορδή και η πρώτη κοιλία από τ' αριστερά, παρατηρείται σε ένα σημείο Ο, όπου $(ΚΟ)=0,5m$. Το πλάτος ταλάντωσης του Ο είναι 0,2m και προκειμένου να γράψουμε εξίσωση για το στάσιμο αυτό, παίρνουμε ένα σύστημα αξόνων με $x=0$, τη θέση Ο και $t_0=0$ τη στιγμή που το Ο βρίσκεται σε μέγιστη θετική απομάκρυνση, ενώ έχει ήδη δημιουργηθεί το στάσιμο κύμα.

- i) Να βρεθεί η ταχύτητα διάδοσης του τρέχοντος κύματος και η συχνότητα ταλάντωσης της χορδής.
- ii) Με βάση τις παραπάνω συμβάσεις, να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργείται πάνω στη χορδή και να κάνετε το στιγμιότυπο του κύματος τη στιγμή $t=0$.
- iii) Δύο σημεία Β και Γ απέχουν από τα άκρα της χορδής Κ και Λ αποστάσεις 0,8m και 1,3m αντίστοιχα. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις της φάσης της απομάκρυνσης των παραπάνω σημείων, στους ίδιους άξονες, σε συνάρτηση με το χρόνο.
- iv) Ακινητοποιούμε τη χορδή και την θέτουμε ξανά σε ταλάντωση, με τέτοια συχνότητα, ώστε να έχουμε το μεγαλύτερο δυνατόν μήκος κύματος. Στην περίπτωση αυτή, μόλις αποκατασταθεί μόνιμη κατάσταση, το σημείο Ο ταλαντώνεται με πλάτος 0,1m. Να υπολογιστεί η συχνότητα ταλάντωσης καθώς και η μέγιστη κινητική ενέργεια που μπορεί να έχει μια στοιχειώδης μάζα $dm=1mg$ της χορδής.

Δίνεται $\sin(0,4\pi) \approx 0,3$.

2.2.42. Δύο τρέχοντα και ένα στάσιμο κύμα.

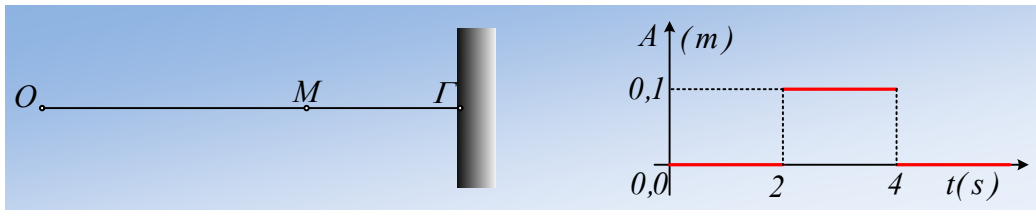
Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, που θεωρούμε ότι ταυτίζεται με τον άξονα x , διαδίδονται δύο όμοια κύματα πλάτους $A=0,1m$, τα οποία διαδίδονται αντίθετα με συχνότητα 1Hz. Τη στιγμή $t=0$ το πρώτο κύμα φτάνει στο σημείο Ο, στη θέση $x=0$, ενώ το δεύτερο απέχει κατά 2m από το Ο, όπως στο σχήμα.



- i) Να γράψετε τις εξισώσεις των δύο τρεχόντων κυμάτων.
- ii) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που θα προκύψει μετά την συμβολή των δύο παραπάνω κυμάτων.
- iii) α) Να σχεδιάσετε τη μορφή του ελαστικού μέσου, στην περιοχή $-2m \leq x \leq 3m$, τη χρονική στιγμή $t_1=1,25s$.
β) Να σχεδιάσετε επίσης τη μορφή του μέσου τη στιγμή $t_1'=1s$.
- iv) Να κάνετε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος και για την περιοχή που έχει αυτό σχηματισθεί, τη χρονική στιγμή $t_2=1,75s$.
- v) Ένα σημείο Σ βρίσκεται στη θέση $x=0,5m$. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σημείου Σ σε συνάρτηση με το χρόνο, από $t=0$, έως και $t=4s$.

2.2.43. Ένα στάσιμο κύμα σε νήμα και ταλαντώσεις σημείων.

Το άκρο Γ, ενός τεντωμένου οριζώντιου νήματος ΟΓ είναι δεμένο σε κατακόρυφο τοίχο. Τη στιγμή $t_0=0$ το άκρο Ο τίθεται σε κατακόρυφη αρμονική ταλάντωση, με εξίσωση $y=A\eta\mu 2\pi t$, οπότε κατά μήκος του νήματος διαδίδεται ένα εγκάρσιο κύμα με μήκος κύματος $\lambda=1,2\text{m}$. Θεωρούμε ότι το κύμα διαδίδεται χωρίς αποσβέσεις, με σταθερό πλάτος. Η γραφική παράσταση του πλάτους ταλάντωσης ενός σημείου Μ του νήματος, σε συνάρτηση με το χρόνο, δίνεται στο διπλανό διάγραμμα, ενώ το άκρο Ο συνεχίζει να ταλαντώνεται μέχρι τη στιγμή $t=6\text{s}$.

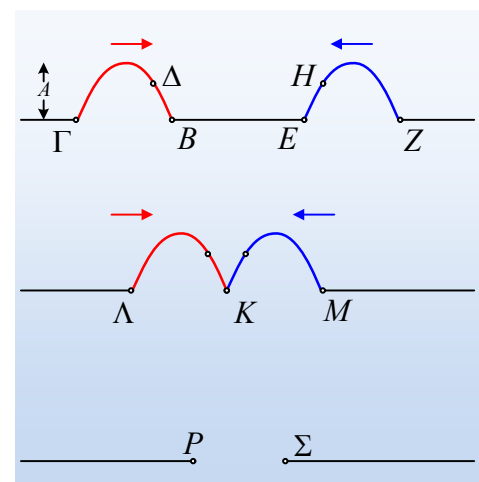


- Πόσο απέχει το σημείο Μ από το άκρο Ο και πόσο είναι το μήκος του νήματος;
- Ένα σημείο Ν είναι δεξιότερα του Μ σε απόσταση $(MN)=0,3\text{m}$. Να κάνετε τη γραφική παράσταση του πλάτους ταλάντωσης του σημείου Ν σε συνάρτηση με το χρόνο, μέχρι τη στιγμή $t=6\text{s}$.
- Να κάνετε επίσης την αντίστοιχη γραφική παράσταση για το πλάτος ταλάντωσης ενός σημείου Ρ, το οποίο είναι αριστερότερα του Μ σε απόσταση $(PM)=0,1\text{m}$, για το ίδιο χρονικό διάστημα.

2.2.44. Ένα ελαστικό μέσο – Δύο παλμοί.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδονται δύο πανομοιότυποι παλμοί, όπως στο πάνω σχήμα και τα σημεία Δ και Η απέχουν εξίσου από τη θέση ισορροπίας.

- Η φάση της απομάκρυνσης του σημείο Β είναι ίση με, του σημείου Ε, του Γ και του Ζ
- Να σχεδιάσετε στο πρώτο σχήμα τις ταχύτητες ταλάντωσης των σημείων Β, Γ, Δ, Ε, Ζ και Η.
- Να συγκρίνετε τα μέτρα των ταχυτήτων των παραπάνω σημείων.
- Μετά από λίγο, οι δύο παλμοί συναντώνται στο σημείο Κ.

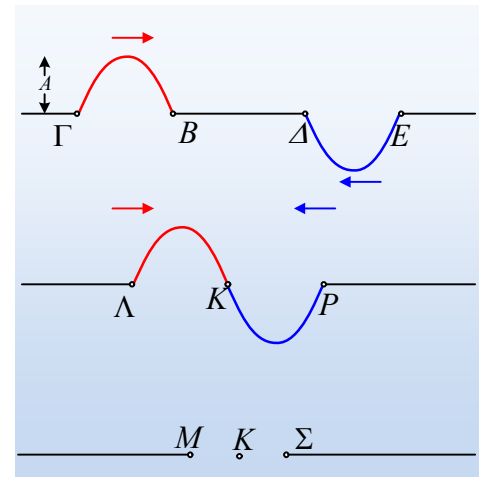


Να σχεδιάσετε ξανά τις ταχύτητες ταλάντωσης των σημείων που έχουν σημειωθεί στο μεσαίο σχήμα.

- Αν η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Β είναι 1m/s (πάνω σχήμα), πόση είναι η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Κ (μεσαίο σχήμα);
- Στο κάτω σχήμα, να σχεδιάσετε τη μορφή του μέσου τη στιγμή που τα άκρα και των δύο παλμών είναι τα σημεία Ρ και Σ.
- Πόσο είναι η ταχύτητα ταλάντωσης των σημείων Ρ και Σ;
- Κάθε παλμός μεταφέρει ενέργεια κατά τη διάδοσή του. Με ποια μορφή εμφανίζεται η ενέργεια του κύματος στο τελευταίο σχήμα;

2.2.45. Ένα ελαστικό μέσο – Δύο «αντίθετοι» παλμοί.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδονται δύο παλμοί, ίδιου πλάτους και «μήκους κύματος» όπως στο πάνω σχήμα.



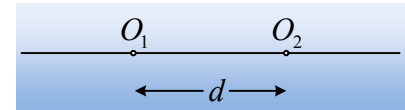
- i) Η φάση της απομάκρυνσης του σημείου Β είναι ίση με, του σημείου Δ, του Γ και του Ε
- ii) Να σχεδιάσετε στο πρώτο σχήμα τις ταχύτητες ταλάντωσης των σημείων Β, Γ, Δ και Ε.
- iii) Να συγκρίνετε τα μέτρα των ταχυτήτων των παραπάνω σημείων.
- iv) Μετά από λίγο, οι δύο παλμοί συναντώνται στο σημείο Κ.

Να σχεδιάσετε ξανά τις ταχύτητες ταλάντωσης των σημείων που έχουν σημειωθεί στο μεσαίο σχήμα.

- v) Αν η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Β είναι 1m/s (πάνω σχήμα), πόση είναι η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Κ (μεσαίο σχήμα);
- vi) Στο κάτω σχήμα, να σχεδιάσετε τη μορφή του μέσου τη στιγμή που τα άκρα και των δύο παλμών είναι τα σημεία Μ και Σ.
- vii) Πόσο είναι η ταχύτητα ταλάντωσης των σημείων Μ και Σ;
- viii) Κάθε παλμός μεταφέρει ενέργεια κατά τη διάδοσή του. Με ποια μορφή εμφανίζεται η ενέργεια του κύματος στο τελευταίο σχήμα;

2.2.46. Δύο κύματα στο ίδιο γραμμικό ελαστικό μέσον.

Σε δύο σημεία O_1 και O_2 , τα οποία απέχουν απόσταση $(O_1O_2)=d=4\text{m}$, ενός άπειρου γραμμικού ελαστικού μέσου, υπάρχουν δυο πηγές κύματος, οι οποίες αρχίζουν να ταλαντώνονται τη στιγμή $t_0=0$



ταυτόχρονα, με εξίσωση απομάκρυνσης $y=0,4\cdot\eta\mu 2\pi t$ (S.I.). Έτσι δημιουργούνται κύματα τα οποία διαδίδονται και προς τις δύο κατευθύνσεις με ταχύτητα 2m/s, χωρίς αποσβέσεις. Θεωρούμε τη θέση O_1 ως αρχή του άξονα x και μας απασχολεί το τι συμβαίνει δεξιά της πηγής O_1 ($x>0$).

- i) Να γράψετε τις εξισώσεις των κυμάτων που διαδίδονται κατά μήκος του μέσου.
- ii) Να σχεδιάσετε τη μορφή του μέσου τη χρονική στιγμή $t_1=0,75\text{s}$.
- iii) Να σχεδιάσετε επίσης τη μορφή του μέσου τις χρονικές στιγμές:
 - A) $t_2=3\text{s}$ και
 - B) $t_3=3,25\text{s}$.

2.2.47. Διάδοση κυμάτων και συμβολή τους.

Στις θέσεις $x_1=0$ και $x_2=10\text{m}$ ενός ομογενούς γραμμικού ελαστικού μέσου υπάρχουν δύο πηγές O_1 και O_2 εγκαρσίων κυμάτων, που διαδίδονται με ταχύτητα v . Για $t=0$ οι δύο πηγές αρχίζουν ταυτόχρονα να ταλαντώνονται με εξίσωση $y=A\cdot\eta\mu\omega t$ (S.I.), οπότε δημιουργείται ένα κύμα εξαιτίας της O_1 το οποίο

διαδίδεται προς τα δεξιά και ένα κύμα εξαιτίας της O_2 , που διαδίδεται προς τ' αριστερά. Κύματα δημιουργούνται μόνο στο χώρο μεταξύ των δύο πηγών.

- i) Στο σχήμα φαίνεται η μορφή του μέσου τη στιγμή $t_1=1,5s$, εξαιτίας του κύματος από την πρώτη πηγή.

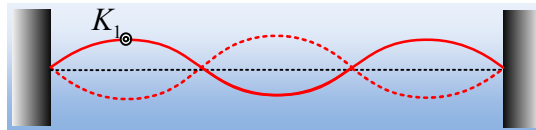


Να συμπληρωθεί το σχήμα, ώστε να φαίνεται και η διάδοση της διαταραχής εξαιτίας της δεύτερης πηγής O_2 .

- ii) Να σχεδιάσετε τη μορφή του μέσου τις χρονικές στιγμές $t_2=2,5s$ και $t_3=3,5s$.
 iii) Να βρεθούν οι ταχύτητες ταλάντωσης των σημείων Β και Γ στις θέσεις $x_B=5m$ και $x_\Gamma=6m$ τις παραπάνω χρονικές στιγμές, αν το πλάτος της ταχύτητας ταλάντωσης κάθε πηγής είναι $0,5m/s$.

2.2.48. Ένα στάσιμο κύμα, δύο εξισώσεις στάσιμου.

Μια χορδή μήκους $3m$ έχει στερεωμένα τα δυο άκρα της. Η χορδή τίθεται σε ταλάντωση και πάνω της δημιουργείται ένα στάσιμο κύμα, με μορφή όπως στο παρακάτω σχήμα, όπου το πλάτος ταλάντωσης της πρώτης κοιλίας K_1 είναι $0,2m$ και η συχνότητά της $20Hz$.



- i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα ενός τρέχοντος κύματος κατά μήκος της παραπάνω χορδής.
 ii) Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος, δεχόμενοι ότι η αρχή του άξονα, είναι η θέση ισορροπίας της κοιλίας K_1 , ενώ τη στιγμή $t=0$ το σημείο K_1 περνά από τη θέση ισορροπίας της κινούμενη προς τα πάνω (θετική κατεύθυνση).
 iii) Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου, δεχόμενοι ως αρχή του άξονα x , το αριστερό άκρο της χορδής και την ίδια, όπως παραπάνω, στιγμή $t=0$.
 iv) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας ταλάντωσης ενός σημείου Σ το οποίο απέχει $1,25 m$ από το αριστερό άκρο της χορδής. Η απάντηση να δοθεί με την βοήθεια και των δύο παραπάνω εξισώσεων στάσιμου που βρήκατε.

2.2.49. Άλλο ένα στάσιμο κύμα σε χορδή.

Πάνω σε μια χορδή μήκους $10m$ έχει δημιουργηθεί ένα στάσιμο κύμα. Για να το μελετήσουμε μαθηματικά, παίρνουμε ένα σύστημα αξόνων $x-y$, όπου σε ένα σημείο O , που απέχει $3m$ από το αριστερό άκρο του θέτουμε $x=0$, ενώ θεωρούμε $t=0$ τη στιγμή που το σημείο O βρίσκεται στην μέγιστη θετική απομάκρυνσή του. Το σημείο O φτάνει για πρώτη φορά στη μέγιστη αρνητική απομάκρυνσή του τη στιγμή $t=0,5s$, αφού διανύσει απόσταση $0,8m$, ενώ απέχει οριζόντια απόσταση $1m$ από τον κοντινότερο δεσμό του στάσιμου. Δίνεται ακόμη ότι το σημείο O είναι κοιλία του στάσιμου κύματος.

- i) Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι της μορφής:

$$\alpha) y = 2A \cdot \sigma \nu \nu \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) \cdot \eta \mu \left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\beta) y = 2A \cdot \eta \mu \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) \cdot \eta \mu \left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\gamma) y = 2A \cdot \sigma \nu \nu \left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \eta \mu \left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2} \right)$$

Επιλέξτε τη σωστή μορφή δικαιολογώντας την επιλογή σας.

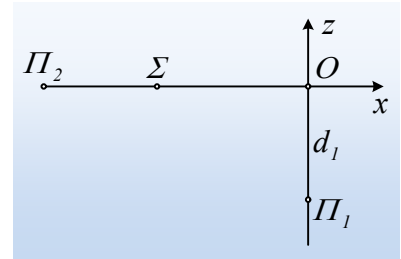
- ii) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.
- iii) Να βρείτε τις θέσεις των δεσμών του στάσιμου κύματος.
- iv) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων στιγμιότυπα του στάσιμου τις χρονικές στιγμές:
 - α) $t_1=0$ και β) $t_2=0,75s$

Σημειώστε πάνω στο διάγραμμα την ταχύτητα του σημείου O, τις παραπάνω χρονικές στιγμές.

- v) α) Να βρεθεί η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου B στη θέση $x_1=4/3m$.
- β) Σε μια στιγμή η ταχύτητα του B έχει τιμή $v_B=0,2\pi$ m/s. Να βρεθεί η αντίστοιχη ταχύτητα, την παραπάνω χρονική στιγμή, ενός σημείου Γ στη θέση $x_1=2m$.

2.2.50. Επιφανειακή συμβολή.

Στην επιφάνεια ενός υγρού ηρεμούν δύο πηγές Π_1 και Π_2 , όπως στο σχήμα (κάτωψη), όπου οι πηγές βρίσκονται σε σημεία δύο κάθετων μεταξύ τους αξόνων x και z, ενώ η πηγή Π_1 απέχει κατά $d_1=1,5m$ από την αρχή O των αξόνων. Σε μια στιγμή $t=0$, οι δύο πηγές τίθενται ταυτόχρονα σε ταλάντωση σε κατακόρυφη διεύθυνση με εξισώσεις $y=0,2 \cdot \eta \mu 2\pi t$ (S.I.). Τα κύματα που δημιουργούνται διαδίδονται στην επιφάνεια του υγρού και δεχόμαστε ότι έχουν σταθερό πλάτος. Τη στιγμή $t_1=3s$ το πρώτο κύμα φτάνει στο σημείο O, ενώ το δεύτερο στο σημείο Σ, όπου $(O\Sigma)=2m$.



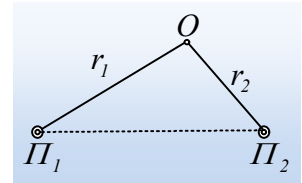
- i) Να βρεθεί η ταχύτητα διάδοσης του κύματος καθώς και η απόσταση ($O\Pi_2$) της δεύτερης πηγής από την αρχή O των αξόνων.
- ii) Να βρεθούν οι απομακρύνσεις και οι ταχύτητες ταλάντωσης των σημείων Σ και O τη στιγμή $t_3=4s$.
- iii) Πόσες ταλαντώσεις εκτελεί το σημείο O, μέχρι να φτάσει και το δεύτερο κύμα; Να βρεθεί η εξίσωση ταλάντωσης του O μετά τη συμβολή.
- iv) Να υπολογιστεί ο λόγος K_1/K_2 όπου K_1 η μέγιστη κινητική ενέργεια μιας στοιχειώδους μάζας m στο σημείο O, πριν την συμβολή και K_2 η αντίστοιχη μέγιστη κινητική ενέργεια, μετά τη συμβολή.
- v) Πόσα σημεία μεταξύ Σ και O, πάνω στον άξονα x ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος;

2.2.51. Επιφανειακή συμβολή με διαφορετικά πλάτη.

Στην επιφάνεια ενός υγρού υπάρχουν δύο πηγές εγκαρσίων κυμάτων Π_1 και Π_2 , οι οποίες αρχίζουν να ταλαντώνονται ταυτόχρονα με εξισώσεις:

$$y_1=0,1\cdot\eta\mu(4\pi t) \text{ και } y_2=0,2\cdot\eta\mu(4\pi t) \text{ μονάδες στο S.I.}$$

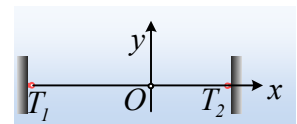
Έτσι δημιουργούνται επιφανειακά κύματα, τα οποία θεωρούμε ότι διαδίδονται με σταθερά πλάτη. Ένα σημείο O της επιφάνειας, απέχει αποστάσεις $r_1=6\text{m}$ και $r_2=4\text{m}$ αντίστοιχα από τις δύο πηγές. Το σημείο O αρχίζει να ταλαντώνεται τη στιγμή $10/3\text{s}$.



- Να υπολογιστεί το μήκος κύματος και η ταχύτητα των κυμάτων που δημιουργούνται.
- Να βρεθεί η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων που θα υποχρεωθεί να εκτελέσει το σημείο O, λόγω συμβολής των κυμάτων.
- Ποια η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου O μετά την συμβολή των δύο κυμάτων;
- Να υπολογιστεί ο λόγος K_1/K_2 , όπου K_1 η μέγιστη κινητική ενέργεια μιας μάζας m στο σημείο O και K_2 η μέγιστη δυνατή κινητική ενέργεια, που μπορεί να έχει η ίδια μάζα, σε κάποιο άλλο σημείο της επιφάνειας του υγρού.

2.2.52. Ένα στάσιμο κύμα ανάμεσα σε δυο σταθερά σημεία.

Μεταξύ δύο σταθερών σημείων T_1 και T_2 βρίσκεται ένα γραμμικό ελαστικό μέσο, μήκους $l=3\text{m}$, στο οποίο έχει δημιουργηθεί ένα στάσιμο κύμα. Ένα σημείο O του ελαστικού μέσου απέχει κατά $1,3\text{m}$ από το δεξιό άκρο T_2 και το λαμβάνουμε ως αρχή ενός συστήματος αξόνων (x,y) . Με βάση αυτό το σύστημα αξόνων, το στάσιμο κύμα μπορεί να περιγραφεί από μια εξίσωση της μορφής:



$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T} + \vartheta_0\right) \quad (1)$$

όπου τη στιγμή $t=0$, το σημείο O βρίσκεται σε απομάκρυνση $y=-0,1\text{m}$ με μηδενική ταχύτητα. Εξάλλου σε χρονικό διάστημα $\Delta t=0,4\text{s}$ το O εκτελεί δυο πλήρης ταλαντώσεις, ενώ η μέγιστη ταχύτητα που αποκτά μια κοιλία του μέσου έχει μέτρο $v_{\max}=2\pi \text{ m/s}$.

- Να βρεθεί η συχνότητα και το πλάτος ταλάντωσης μιας κοιλίας του μέσου.
- Ποιες οι δυνατές τιμές της γωνίας φ_0 που περιλαμβάνεται στην παραπάνω εξίσωση;
- Αν $\varphi_0=\pi/3 \text{ rad}$ να υπολογιστεί η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος κατά μήκος του μέσου αυτού, αν μεταξύ του σημείου O και του σημείου πρόσδεσης T_2 υπάρχουν δύο σημεία του μέσου που παραμένουν ακίνητα.
- Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος.
- Να παρασταθούν στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος τις χρονικές στιγμές $t_1=0$ και $t_2=0,125 \text{ s}$, στο ίδιο σύστημα αξόνων.