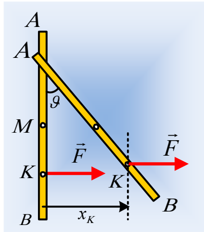
Η επιτάχυνση μιας σανίδας στον πάγο



Σε μια παγωμένη λίμνη ηρεμεί οριζόντια, μια ομογενής σανίδα ΑΒ μήκους l=4m και μάζας m=12kg. Σε μια στιγμή t_0=0, δέχεται την επίδραση μιας **σταθερής** οριζόντιας δύναμης μέτρου F=6N, η οποία ασκείται στο σημείο Κ, όπου (ΒΚ)=1m και αρχικά είναι κάθετη στη σανίδα. Τη χρονική στιγμή t_1=2s το σημείο εφαρμογής της δύναμης Κ, έχει μετατοπισθεί κατά x_K=1,6m στην διεύθυνση της ασκούμενης δύναμης, ενώ η σανίδα έχει περιστραφεί κατά γωνία θ, όπως στο σχήμα. Κατά την κίνηση της σανίδας δεν εμφανίζονται τριβές.

i) Να βρεθεί η επιτάχυνση του σημείου Κ, αμέσως μόλις ασκηθεί η δύναμη (για $t=0^+$).

ii) Να υπολογιστεί η γωνία περιστροφής θ της σανίδας.

iii) Πόση ενέργεια μεταφέρεται στη σανίδα μέσω του έργου της δύναμης από 0-t_1;

iv) Με ποιο ρυθμό μεταφέρεται ενέργεια στη σανίδα τη στιγμή t_1;

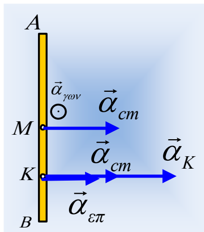
Δίνεται η ροπή αδράνειας της σανίδας ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I_{cm}=(1/12)ml^2$.

Απάντηση:

i) Θεωρώντας την κίνηση της ράβδου σύνθετη, μια μεταφορική και μια περιστροφή γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το μέσον (κέντρο μάζας) Μ της ράβδου, παίρνουμε:

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x = m\alpha_{cm} \to F = m\alpha_{cm} \to$

$$\alpha_{cm} = \frac{F}{m} = \frac{6}{12} m/s^2 = 0{,}5 m/s^2.$$



Όπου η διεύθυνση x, είναι η διεύθυνση της δύναμης F.

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau_M = I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \to F\cdot\frac{\ell}{4} = \frac{1}{12}m\ell^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \to$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{3F}{m\ell} = \frac{3\cdot 6}{12\cdot 4} rad/s^2 = \frac{3}{8} rad/s^2.$$

Αλλά τότε η επιτάχυνση του σημείου Κ είναι το διανυσματικό άθροισμα της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας, λόγω μεταφορικής κίνησης και της $\alpha_{\varepsilon\pi} = \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$, ή:

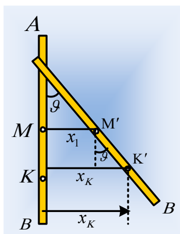
$$\alpha_{\varepsilon\pi} = \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot(\mathrm{MK}) = 0{,}375 m/s^2.$$

$$\alpha_K = \alpha_{cm} + \alpha_{\varepsilon\pi} = (0{,}5 + 0{,}375) m/s^2 = 0{,}875 m/s^2.$$

Με κατεύθυνση αυτή, της ασκούμενης δύναμης F.

ii) Μέχρι τη στιγμή t_1 το κέντρο μάζας Μ της σανίδας μετατοπίζεται κατά:

$$x_1 = \frac{1}{2}\alpha_{cm}t_1^2 = \frac{1}{2}0{,}5\cdot 2^2 m = 1m$$

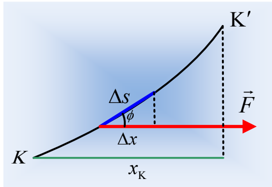


Με βάση το διπλανό σχήμα $x_\kappa = x_1 + (M'K')\cdot$ημθ, οπότε:

$$\eta\mu\theta = \frac{x_K - x_1}{\ell/4} = \frac{1{,}6m - 1m}{1m} = 0{,}6$$

Η σανίδα δηλαδή έχει περιστραφεί κατά γωνία θ, όπου ημθ=0,6. (*αν διαθέτουμε μικροϋπολογιστή μπορούμε να βρούμε ότι θ=37°*).

iii) Προφανώς, με βάση και το σχήμα, η τροχιά του σημείου εφαρμογής της δύναμης (σημείο Κ) είναι καμπυλόγραμμη. Για να υπολογίσουμε το έργο της δύναμης, αρκεί να εφαρμόσουμε τον ορισμό του έργου δύναμης W=F·Δs·συνφ=F·(Δsσυνφ)=F·Δx, όπου Δs·συνφ η προβολή της μετατόπισης στην διεύθυνση της δύναμης. Αλλά τότε αν χωρίσουμε την καμπύλη τροχιά σε στοιχειώδεις μετατοπίσεις Δs_1, Δs_2… Δs_ν το συνολικό έργο της δύναμης θα είναι:



$$W_F = F\cdot \Delta s_1 \sigma\upsilon\nu\phi_1 + F\cdot\Delta s_2\sigma\upsilon\nu\phi_2 + \ldots + F\cdot\Delta s_\nu\sigma\upsilon\nu\phi_\nu \rightarrow$$

$$W_F = F\cdot(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_\nu) = F\cdot x_K = 6\cdot 1{,}6J = 9{,}6J$$

iv) Τη στιγμή t_1 το κέντρο μάζας Μ της σανίδας έχει ταχύτητα:

$$\upsilon_{cm}=\alpha_{cm}t_1=0{,}5\cdot 2m/s=1m/s.$$

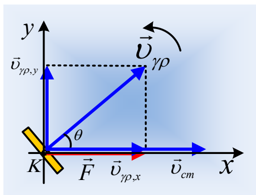
Εφαρμόζουμε για το παραπάνω χρονικό διάστημα, το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για τη σανίδα παίρνοντας:

$$K_1 - K_o = W_F \rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\cdot\omega^2 - 0 = W_F$$

(Η ενέργεια που μεταφέρθηκε στη σανίδα, μέσω του έργου της δύναμης F, εμφανίζεται ως κινητική ενέργεια της σανίδας) όπου $I_{cm} = \frac{1}{12}m\ell^2 = 16kgm^2$. Λύνοντας ως προς τη γωνιακή ταχύτητα, έχουμε:

$$\omega = \sqrt{\frac{2W_F - m\upsilon_{cm}^2}{I_{cm}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 9{,}6 - 12\cdot 1^2}{16}}rad/s \approx 0{,}7rad/s$$

Με βάση το γεγονός ότι η ράβδος εκτελεί σύνθετη κίνηση, σχεδιάζουμε τις ταχύτητες του σημείου Κ, παίρνοντας το διπλανό σχήμα, όπου η γωνία μεταξύ $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$ και $\vec{\upsilon}_{cm}$ είναι θ (οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες). Αλλά τότε στη διεύθυνση x (διεύθυνση της δύναμης) το σημείο Κ έχει ταχύτητα:



$$\upsilon_x=\upsilon_{cm}+\upsilon_{\gamma\rho,x}=\upsilon_{cm}+\omega\frac{\ell}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$$

όπου $\sigma\upsilon\nu\theta = \sqrt{1-\eta\mu^2\theta} = 0{,}8$, ενώ ο ρυθμός με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια στη σανίδα, μέσω του έργου της δύναμης είναι ίσος:

$$\frac{dW_F}{dt} = \mathrm{P}_F = \frac{F \cdot ds \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}{\mathrm{dt}} = F \cdot \upsilon_x \rightarrow$$

$$\frac{dW_F}{dt} = F \cdot \upsilon_x = 6(1 + 0{,}7 \cdot 1 \cdot 0{,}8) J/s = 9{,}36 J/s$$

Σχόλιο

Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τον ρυθμό με τον οποίο η δύναμη μεταφέρει ενέργεια στη σανίδα «βλέποντας» τον διπλό της ρόλο. Σαν έργο δύναμης παράγει έργο που αυξάνει τη μεταφορική κινητική ενέργεια και σαν έργο ροπής αυξάνει την αντίστοιχη περιστροφική και να γράφαμε:

$$\frac{dW_F}{dt} = F \cdot \upsilon_{cm} + \tau \cdot \omega = F \cdot \upsilon_{cm} + (F \cdot \frac{\ell}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta) \cdot \omega$$

Λογική όμως, που δεν θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε στο ερώτημα iii) αφού η δύναμη είναι σταθερή, αλλά η ροπή της μεταβάλλεται.

Έτσι προτιμήθηκε μια ενιαία αποδεικτική πορεία.

dmargaris@gmail.com