Η αντλία και η ισχύ της

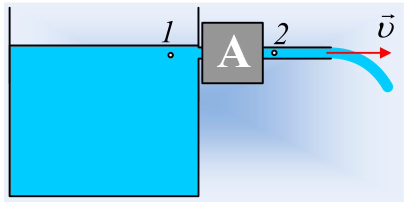
Κατά την προηγούμενη χρονιά είχα αναρτήσει τρία θέματα με αντλίες, τα οποία διαπίστωσα ότι …δύσκολα περπάτησαν, αφού θεωρήθηκαν δύσκολα.

Ας πάρουμε λοιπόν τα πράγματα από την αρχή, να δούμε ποιος είναι ο ρόλος μιας αντλίας.

Στα παρακάτω θεωρούμε το νερό ιδανικό ρευστό, πυκνότητας ρ=1.000kg/m^3 και τις ροές μόνιμες και στρωτές. Η ατμοσφαιρική πίεση είναι $p_{ατμ}=10^5 N/m^2$, ενώ $g=10m/s^2$.

Εφαρμογή 1η :

Η αντλία του σχήματος, είναι προσκολλημένη στον τοίχο μιας δεξαμενής, από την οποία αντλεί νερό, από μια περιοχή κοντά στην επιφάνεια και το οποίο διοχετεύει με οριζόντιο σωλήνα διατομής 2cm^2. Αν η παροχή είναι ίση με 0,4L/s, να υπολογιστεί η ισχύς της αντλίας.



Απάντηση:

Με βάση το σχήμα, ο ρόλος της αντλίας είναι να μεταφέρει το νερό από την περιοχή 1. στην περιοχή 2., προσδίδοντάς και κάποια ταχύτητα. Συνεπώς άσχετα με το μηχανισμό μεταφοράς του νερού, δίνει σε μια ποσότητα νερού μάζας dm, κατά τη μεταφορά, κινητική ενέργεια $dK=\frac{1}{2}dm\cdot\upsilon^2$. Οπότε ο ρυθμός με τον οποίο παρέχει ενέργεια στο νερό, **η ισχύς της αντλίας**, είναι ίσος:

$$\frac{dW}{dt}=P_a=\frac{dK}{dt}=\frac{\frac{1}{2}dm\cdot\upsilon^2}{dt}=\frac{\frac{1}{2}\rho dV\cdot\upsilon^2}{dt}=\left(\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon^2\right)\cdot\frac{dV}{dt}=\left(\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon^2\right)\cdot\Pi \quad (1)$$

Όπου Π η παροχή της αντλίας.

Όμως αν η ταχύτητα εκροής του νερού είναι υ, τότε η παροχή είναι ίση με Π=Αυ, οπότε

$$\upsilon=\frac{\Pi}{A}=\frac{0{,}4\cdot10^{-3}}{2\cdot10^{-4}}m/s=2m/s \text{ και}$$

$$P_a=\Pi\cdot\left(\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon^2\right)=0{,}4\cdot10^{-3}\cdot\frac{1}{2}1.000\cdot2^2W=0{,}8W$$

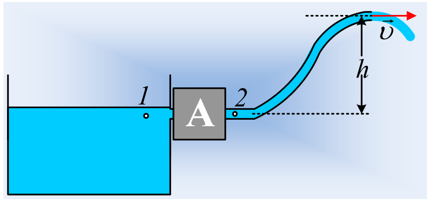
Αξίζει να σημειωθούν δυο πράγματα:

1) Ο σωλήνας έχει σταθερή διατομή, οπότε η ταχύτητα του νερού κατά μήκος του, έχει σταθερή τιμή. Έτσι η ταχύτητα εκροής στο άκρο του σωλήνα, είναι ίση και με την ταχύτητα του νερού στην έξοδο της αντλίας, περιοχή 2.

2) Η πίεση στο άκρο του σωλήνα εκροής, είναι ίση με την ατμοσφαιρική, όση είναι και στην έξοδο της αντλίας, με βάση την εξίσωση Bernoulli. Αλλά και στην περιοχή 1., από όπου αντλεί το νερό η αντλία, η πίεση είναι επίσης ίση με την ατμοσφαιρική, συνεπώς η παρουσία της αντλίας δεν προκαλεί καμιά μεταβολή πίεσης και η ισχύς της δεν συνδέεται με πιέσεις.

Εφαρμογή 2η :

Η αντλία του σχήματος, είναι προσκολλημένη στον τοίχο μιας δεξαμενής, από την οποία αντλεί νερό, από μια περιοχή κοντά στην επιφάνεια και το οποίο διοχετεύει σε σωλήνα σταθερής διατομής $2cm^2$. Αν η παροχή είναι ίση με 0,4L/s, ενώ το νερό ανέρχεται κατά h=2m να υπολογιστεί η ισχύς της αντλίας.



Απάντηση:

Με βάση την προηγούμενη εφαρμογή το νερό, εξέρχεται ξανά με ταχύτητα υ=2m/s, αφού η παροχή παραμένει η ίδια, αλλά τότε και η αύξηση της κινητικής του ενέργειας, θα είναι επίσης ίδια. Η μόνη διαφορά είναι ότι αντλία μεταφέροντας το νερό σε ύψος h του αυξάνει και τη δυναμική ενέργεια. Με άλλα λόγια η ενέργεια που παρέχει η αντλία στο νερό, θα εμφανιστεί εν μέρει ως κινητική και εν μέρει ως δυναμική ενέργεια του νερού. Αλλά τότε η ισχύς της αντλίας θα είναι ίση:

$$\frac{dW}{dt} = P_a = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{\frac{1}{2}dm \cdot \upsilon^2}{dt} + \frac{dm \cdot gh}{dt} \rightarrow$$

$$P_a = \frac{\frac{1}{2}\rho dV \cdot \upsilon^2}{dt} + \frac{\rho dV \cdot gh}{dt} = \left(\frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon^2\right) \cdot \frac{dV}{dt} + \rho gh \cdot \frac{dV}{dt}$$

$$P_a = \left(\frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon^2 + \rho gh\right) \cdot \Pi \quad (2)$$

Με αντικατάσταση:

$$P_a = \Pi \cdot \left(\frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon^2 + \rho gh\right) = 0{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}1.000 \cdot 2^2 + 1.000 \cdot 10 \cdot 2\right)W = 8{,}8W$$

Σχόλια:

1) Αν συγκρίνουμε τις εξισώσεις (1) και (2) βλέπουμε ότι διαφέρουν κατά ρgh·Π, ή αν προτιμάτε, η ισχύς από την τιμή 0,8W, πήγε στα 8,8W, όπου αυτά τα επιπλέον 8W, αντιστοιχεί στην ενέργεια (ανά μονάδα χρόνου) που η αντλία παρέχει στο νερό, για να το ανεβάσει σε ύψος h. Το μέρος αυτό της ισχύος δίνει ο προσθετέος:

$$P_{a2} = \Pi \cdot (\rho gh) = 8W \quad (3)$$

2) Αν πάρουμε την εξίσωση Bernoulli για τη ροή από τη θέση (2) μέχρι την έξοδο, έχουμε:

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho gh$$

Αλλά αφού ο σωλήνας έχει σταθερή διατομή, $\upsilon_2=\upsilon$, οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$p_2 = p_{\alpha\tau\mu} + \rho gh \quad (4)$$

Τι μας λέει η παραπάνω εξίσωση;

Ότι η αντλία, για να μπορέσει να ανεβάσει σε ύψος h το νερό, δημιουργεί στην έξοδό της, αυξημένη πίεση. Έτσι ενώ στην 1η εφαρμογή οι πιέσεις στις περιοχές 1. Και 2. ήταν ίσες με την ατμοσφαιρική πίεση, τώρα στην είσοδο έχουμε $p_1=10^5Pa$, ενώ στην έξοδο της αντλίας (περιοχή 2.):

$$p_2 = p_{ατμ} + \rho gh = \left(10^5 + 1.000 \cdot 10 \cdot 2\right) Pa = 1{,}2 \cdot 10^5\, Pa$$

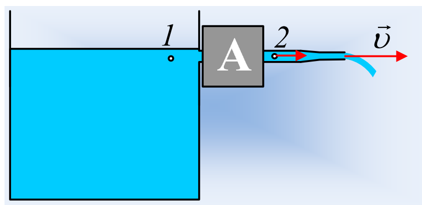
3) Αν μετασχηματίσουμε την (4), μπορούμε να πάρουμε $\rho gh = p_2 - p_{ατμ}$ οπότε η (2) γράφεται:

$$P_a = \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon^2 \cdot \Pi + \left(p_2 - p_{ατμ}\right) \cdot \Pi \quad (5)$$

Όπου στην παραπάνω μορφή, θα μπορούσαμε να διαπιστώσουμε, δύο προσθετέους. Ο πρώτος μετράει το μέρος της παρεχόμενης ισχύος, που εμφανίζεται ως κινητική ενέργεια, ενώ το δεύτερο το **έργο** που παράγει πάνω στην ποσότητα του νερού, η δύναμη που δέχεται, λόγω πίεσης. Αν δηλαδή επιθυμούσαμε να μιλήσουμε με όρους έργου-ενέργειας, κατά την άνοδο μιας μάζας dm νερού, το έργο του βάρους είναι $W_w=-dm \cdot gh$, οπότε για να μπορεί να μετακινηθεί με σταθερή ταχύτητα, απαιτείται και κάποια άλλη δύναμη που να παράγει έργο $W_1=dm \cdot gh$. Αυτή η δύναμη ασκείται στο νερό από την αντλία! Πώς; Εξασφαλίζοντας αυξημένη πίεση p_2 στην έξοδό της.

Εφαρμογή 3η :

Η αντλία του σχήματος, είναι προσκολλημένη στον τοίχο μιας δεξαμενής, από την οποία αντλεί νερό, από μια περιοχή κοντά στην επιφάνεια και το οποίο διοχετεύει σε σωλήνα αρχικής διατομής $A_1= 2cm^2$, ο οποίος στη συνέχεια στενεύει, με αποτέλεσμα η διατομή της φλέβας στην έξοδο να είναι $A_2=1cm^2$. Αν η παροχή είναι ίση με 0,4L/s, να υπολογιστεί η ισχύς της αντλίας.



Απάντηση:

Και στην περίπτωση αυτή, όλη η ενέργεια που παρέχει η αντλία μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του νερού, συνεπώς από την εξίσωση (1) έχουμε:

$$\frac{dW}{dt} = P_a = \left(\frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon^2\right) \cdot \Pi$$

Όπου υ η τελική ταχύτητα ροής στην έξοδο του σωλήνα, για την οποία έχουμε:

$$\upsilon = \frac{\Pi}{A_1} = \frac{0{,}4 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-4}} m/s = 4m/s$$

Αλλά τότε η ισχύς της αντλίας είναι:

$$P_{a3} = \left(\frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon^2\right) \cdot \Pi = \frac{1}{2} 1.000 \cdot 4^2 \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-3} W = 3{,}2W$$

Βλέπουμε δηλαδή 4πλάσια ισχύ σε σχέση με την 1η εφαρμογή.

Σχόλια:

1) Από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ της διατομής της φλέβας στην περιοχή 2. και στην έξοδο από το σωλήνα παίρνουμε:

$$A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon \to \upsilon_1 = \frac{\upsilon}{2} = 2m/s$$

Η ταχύτητα δηλαδή του νερού στην έξοδο της αντλίας, είναι ίση και με τις δυο πρώτες περιπτώσεις. Πράγμα που σημαίνει ότι το «πέρασμα» του νερού από την αντλία, έγινε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, όπως και πριν, οπότε η ισχύς που παρείχε η γεννήτρια ήταν ξανά $P_{a3,1} = \left(\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon_1^2\right)\cdot\Pi = 0,8W$.

2) Αλλά τότε τι ακριβώς έγινε με τα υπόλοιπα 2,4W;

Ας πάρουμε την εξίσωση Bernoulli κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής για την θέση 2. και την έξοδο:

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2$$

Βρίσκουμε ότι:

$$p_2 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 - \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = 10^5\,Pa + \frac{1}{2}1.000(4^2 - 2^2)Pa = 1,06\cdot 10^5\,Pa$$

Τι σημαίνει αυτό; Ότι λόγω στενέματος του σωλήνα, στην περιοχή 2. η πίεση είναι αυξημένη και αυτή την αύξηση πρέπει να την εξασφαλίσει η αντλία. Αλλά τότε παράγεται έργο, από την αντλία, μέσω πίεσης:

$$W = (p_2 - p_{\alpha\tau\mu})\Delta V$$

Πράγματι η αντίστοιχη ισχύς, ας την ονομάσουμε $P_{\alpha3,2}$ είναι:

$$P_{a3,2} = \frac{dW}{dt} = \frac{(p_2 - p_{\alpha\tau\mu})\Delta V}{dt} = (p_2 - p_{\alpha\tau\mu})\cdot\Pi \to$$

$$P_{a3,2} = \frac{dW}{dt} = (p_2 - p_{\alpha\tau\mu})\cdot\Pi = (1,06 - 1)\cdot 10^5\cdot 0,4\cdot 10^{-3}W = 2,4W$$

Όση ήταν αυτή που …μας έλειπε!

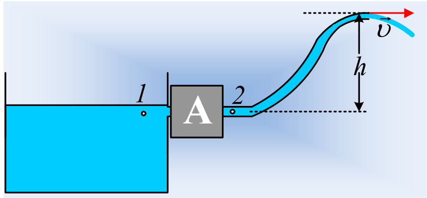
3) Αλλά τότε, με βάση τα προηγούμενα θα μπορούσαμε να «αγνοήσουμε» το στένωμα του σωλήνα και τι γίνεται μετά την έξοδο και αντί να πάρουμε την ισχύ της αντλίας από την εξίσωση (1) να χρησιμοποιήσουμε την (5) γράφοντας:

$$P_{a,3} = \frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon_1^2\cdot\Pi + (p_2 - p_{\alpha\tau\mu})\cdot\Pi \quad (6)$$

Χρησιμοποιώντας δηλαδή την ταχύτητα και την πίεση στην έξοδο της αντλίας.

Εφαρμογή 4η :

Η αντλία του σχήματος, είναι προσκολλημένη στον τοίχο μιας δεξαμενής, από την οποία αντλεί νερό, από μια περιοχή κοντά στην επιφάνεια και το οποίο διοχετεύει σε σωλήνα αρχικής διατομής $2cm^2$ και τελικής



$1cm^2$. Αν η παροχή είναι ίση με 0,4L/s, ενώ το νερό ανέρχεται κατά h=2m να υπολογιστεί η ισχύς της αντλίας.

Απάντηση:

Με βάση τα προηγούμενα υ=4m/s, ενώ $υ_2$=2m/s.

Ας πάμε τώρα ανάποδα!

Ας πάρουμε την εξίσωση Bernoulli κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής για την θέση 2. και την έξοδο:

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 = p_{ατμ} + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho gh$$

Οπότε βρίσκουμε ότι:

$$p_2 = p_{ατμ} + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 - \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho gh \to$$

$$p_2 = 10^5\,Pa + \frac{1}{2}1.000(4^2 - 2^2)Pa + 1.000 \cdot 10 \cdot 2Pa = 1{,}26 \cdot 10^5\,Pa$$

Αλλά τότε η ισχύς της γεννήτριας υπολογίζεται από την εξίσωση (6) ασχολούμενοι μόνο με την αντλία και αδιαφορώντας για το τι συμβαίνει από εκεί και πέρα:

$$P_{a,4} = \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_2^2 \cdot \Pi + \left(p_2 - p_{ατμ}\right) \cdot \Pi \to$$

$$P_{a,4} = \frac{1}{2}1.000 \cdot 2^2 \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-3}W + (1{,}26 - 1)10^5 \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-3}W \to$$

$$P_{a,4} = 0{,}8W + 10{,}4W = 11{,}2W$$

Σχόλια:

Χρειάζεται να ερμηνεύσουμε το αποτέλεσμα;

Δεν έχετε παρά να δείτε τους δύο παραπάνω προσθετέους! Ο πρώτος (0,8W) δείχνει την ισχύ που μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του νερού στην περιοχή 2., ίδια σε όλες τις περιπτώσεις.

Ο δεύτερος (11,2W) μας μετράει το έργο που παράγει η αντλία, μέσω πίεσης στο νερό:

- για να μπορέσει να το ανεβάσει στα δύο μέτρα (8W), εξουδετερώνοντας το έργο του βάρους (εφαρμογή 2),
- για να αυξήσει την κινητική του ενέργεια κατά 2,4W στο στένωμα (εφαρμογή 3).

dmargaris@gmail.com