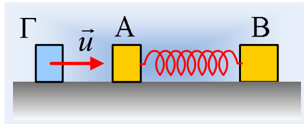
Μια επικείμενη ολίσθηση



Δυο σώματα Α και Β ηρεμούν σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζουν συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0,4$, δεμένα στα άκρα ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=260N/m, το οποίο έχει το φυσικό μήκος του.

Ένα τρίτο σώμα Γ, μάζας m=0,5kg κινείται κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Α, έχοντας τη στιγμή της κρούσης ταχύτητα u. Το σώμα Α, μάζας m_1=1kg, αποκτά ταχύτητα υ_o=4m/s αμέσως μετά την κρούση.

i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα u του σώματος Γ, πριν την κρούση.

ii) Να υπολογιστούν οι ρυθμοί μεταβολής της ορμής και της κινητικής ενέργειας του σώματος Α, αμέσως μετά την κρούση.

Αν το σώμα Β ξεκινά την ολίσθησή του, μόλις το σώμα Α διανύσει απόσταση x=0,2m:

iii) Να υπολογιστεί η μάζα του σώματος Β.

iv) Να υπολογιστούν οι ρυθμοί μεταβολής της ορμής και της κινητικής ενέργειας των σωμάτων Α και Β, ελάχιστα πριν αρχίσει η ολίσθηση του Β σώματος.

Δίνεται g=10m/s^2.

Απάντηση:

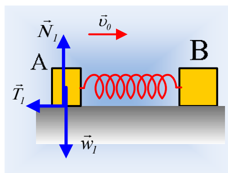
i) Οι ταχύτητες των σωμάτων Α και Γ μετά την ελαστική μεταξύ τους κρούση, δίνονται από τις εξισώσεις:

$$\upsilon_A = \frac{2m}{m+m_1}u \quad (1) \quad \text{και} \quad \upsilon_\Gamma = \frac{m-m_1}{m+m_1}u \quad (2)$$

Από την (1) λύνοντας ως προς u παίρνουμε:

$$u = \frac{m+m_1}{2m}\upsilon_A = \frac{m+m_1}{2m}\upsilon_0 = \frac{0,5+1}{2\cdot 0,5}4m/s = 6m/s$$

ii) Αμέσως μετά την κρούση, το σώμα Α κινείται προς τα δεξιά, ενώ δέχεται τις δυνάμεις, οι οποίες έχουν σημειωθεί στο διπλανό σχήμα, για τις οποίες ισχύουν:



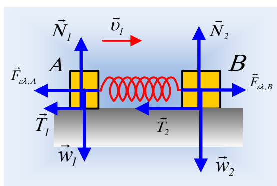
$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N_1 = w_1 = m_1 g \text{ και } T_1 = \mu N_1 = \mu m_1 g = 0,4\cdot 1\cdot 10N = 4N$$

Οπότε για τους ζητούμενους ρυθμούς (θετική φορά προς τα δεξιά) έχουμε:

$$\frac{d\vec{P}_0}{dt} = \Sigma\vec{F} \rightarrow \frac{dP_0}{dt} = -T_1 = -4\,{}^{kgm}\!/\!_{s^2}\,.$$

$$\frac{dK_0}{dt} = \frac{dW_{T_1}}{dt} = \frac{T_1 dx\cdot \sigma\upsilon\nu 180^o}{dt} = -T_1\cdot\upsilon_0 = -4\cdot 4J/s = -16J/s$$

iii) Τη στιγμή που το σώμα Β, «είναι έτοιμο» να ολισθήσει, δέχεται δύναμη τριβής (οριακής) μέτρου $T_2=\mu_s N_2=\mu\cdot m_2 g$ η οποία εξουδετερώνει την δύναμη του ελατηρίου μέτρου $F_{\varepsilon\lambda,B}=k\cdot\Delta\ell = kx = 260\cdot 0,2N = 52N$. Δηλαδή τη στιγμή που επίκειται ολίσθηση, μπορούμε να γράψουμε:



$$\Sigma F_{x,B} = 0 \rightarrow \mu m_2 g = F_{\varepsilon\lambda,B} \rightarrow$$

$$m_2 = \frac{F_{\varepsilon\lambda,B}}{\mu g} = \frac{52}{0,4 \cdot 10} kg = 13kg$$

iv) Στο παραπάνω σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα δυο σώματα, τη στιγμή που το Α, έχοντας μετακινηθεί κατά x, έχει ταχύτητα υ_1, ενώ το Β βρίσκεται ακόμη στην αρχική του θέση και πρόκειται να αρχίσει την κίνησή του.

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για το Α σώμα ανάμεσα στην αρχική του θέση (αμέσως μετά την κρούση) και στη θέση με μετατόπιση x, παίρνοντας:

$$K_{1,\tau\varepsilon\lambda} - K_{1,\alpha\rho\chi} = W_{w_1} + W_{N_1} + W_{T_1} + W_{F_{\varepsilon\lambda,A}} \ (3)$$

Αλλά $W_{w_1} = W_{N_1} = 0$ αφού οι δυνάμεις είναι κάθετες στη μετατόπιση, ενώ $W_{T1}=-T_1 \cdot x$ και:

$W_{F_{\varepsilon\lambda,A}} = -\Delta U = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\varepsilon\lambda} = -\frac{1}{2}kx^2$ οπότε η (1) γίνεται:

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = -T_1 x - \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_0^2 - \frac{2T_1 x + kx^2}{m_1}} = \sqrt{4^2 - \frac{2 \cdot 4 \cdot 0,2 + 260 \cdot 0,2^2}{1}} m/s = 2m/s$$

Έτσι για τους ζητούμενους ρυθμούς έχουμε (με δείκτες 1 και 2 για Α και Β σώμα αντίστοιχα):

$$\frac{d\vec{P}_1}{dt} = \Sigma\vec{F} \rightarrow \frac{dP_1}{dt} = -T_1 - F_{\varepsilon\lambda,A} = -56\, {}^{kgm}\!/_{s^2}$$

$$\frac{d\vec{P}_2}{dt} = \Sigma\vec{F} \rightarrow \frac{dP_2}{dt} = -T_1 + F_{\varepsilon\lambda,B} = 0$$

$$\frac{dK_1}{dt} = -T_1 \cdot \upsilon_1 - F_{\varepsilon\lambda,A} \cdot \upsilon_1 = -4 \cdot 2J/s - 52 \cdot 2J/s = -112J/s$$

$$\frac{dK_2}{dt} = \Sigma F_B \cdot \upsilon_B = 0$$

Σχόλιο.

Αξίζει να προσέξουμε τα τελευταία αποτελέσματα.

- Τη στιγμή που επίκειται η ολίσθηση του Β, αυτό …ακόμη ηρεμεί, οπότε δεν μεταβάλλεται ούτε η ορμή του, ούτε η κινητική του ενέργεια και οι αντίστοιχοι ρυθμοί προέκυψαν μηδενικοί.
- Την ίδια στιγμή η κινητική ενέργεια του Α μειώνεται με ρυθμό 112J/s, αφού η τριβή αφαιρεί ενέργεια με ρυθμό 8J/s, η οποία εμφανίζεται ως θερμική ενέργεια, ενώ το ελατήριο συμπιέζεται, αφαιρώντας από το σώμα ενέργεια με ρυθμό 104J/s, αυξάνοντας έτσι τη δυναμική του ενέργεια.

dmargaris@gmail.com