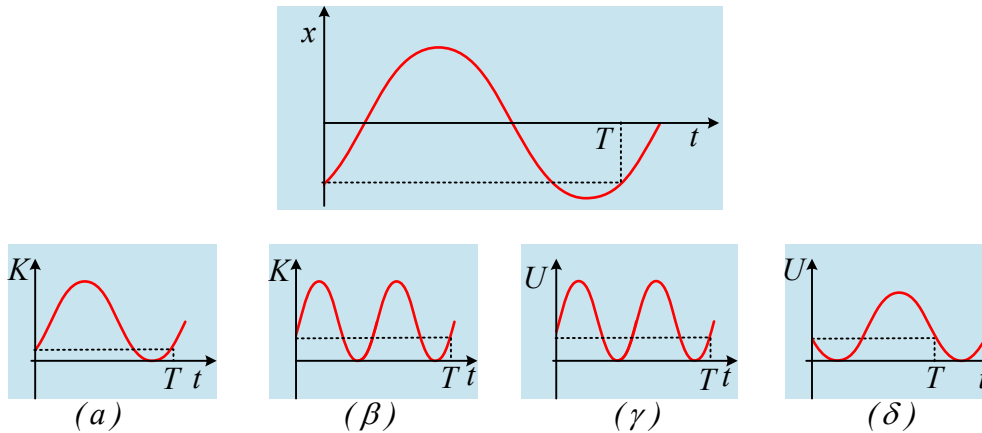


Επιλέγοντας διαγράμματα.

- i) Στο πρώτο από τα παρακάτω σχήματα, δίνεται η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης ενός σώματος που εκτελεί ΑΑΤ, σε συνάρτηση με το χρόνο.



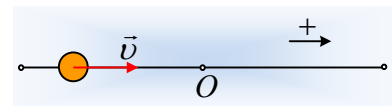
Ποιες από τις επόμενες γραφικές παραστάσεις (για την κινητική και δυναμική ενέργεια ταλάντωσης) είναι σωστές και ποιες λανθασμένες.

Να δικαιολογήσετε αναλυτικά τις επιλογές σας (θετικές και αρνητικές).

- ii) Αν το σώμα ξεκινά τη στιγμή $t=0$ την ταλάντωσή του από τη θέση $x=-A$, να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις της δυναμικής και της κινητικής του ενέργειας, μέχρι να φτάσει στην θέση $x=+A$, σε συνάρτηση με:
- την απομάκρυνση
 - το χρόνο.

Απάντηση:

- i) Το σώμα, με βάση το πρώτο διάγραμμα, τη στιγμή $t=0$ έχει αρνητική απομάκρυνση, κινούμενο προς τη θέση ισορροπίας του, όπως στο διπλανό σχήμα. Έτσι η κινητική του ενέργεια αυξάνεται ενώ η δυναμική του ενέργεια μειώνεται. Αλλά τότε το διάγραμμα (γ) είναι λανθασμένο.



Στη διάρκεια τώρα μιας περιόδου η κινητική ενέργεια θα γίνει μέγιστη δυο φορές, όταν περάσει από τη θέση ισορροπίας O , κινούμενο προς τα δεξιά και στη συνέχεια όταν ξαναπεράσει επιστρέφοντας. Αλλά τότε το διάγραμμα (α) είναι λανθασμένο, ενώ το (β) μπορεί* να είναι σωστό.

Με την ίδια λογική και η δυναμική ενέργεια στη διάρκεια της περιόδου θα γίνει μέγιστη δύο φορές. Μια στη ακραία δεξιά θέση ($x=+A$) και μια στην αριστερή ($x=-A$). Αλλά τότε το διάγραμμα (δ) είναι επίσης λανθασμένο.

Συμπέρασμα, μόνο το διάγραμμα (β) μπορεί να δείχνει σωστά τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας σε συνάρτηση με το χρόνο. Τα υπόλοιπα είναι λανθασμένα.

- ii) α) Η δυναμική ενέργεια του σώματος στη διάρκεια της ΑΑΤ που πραγματοποιεί, δίνεται από την σχέση:

$$U = \frac{1}{2} Dx^2$$

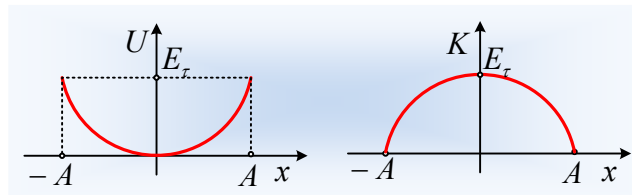
Η οποία είναι συνάρτηση 2^{ου} βαθμού ως προς x δίνοντάς μας μια παραβολή, με τα κοίλα άνω, όπως στο πρώτο από τα παρακάτω σχήματα.

Εξάλλου από την ενέργεια ταλάντωσης παίρνουμε:

$$K+U=E_\tau \rightarrow K + \frac{1}{2} Dx^2 = \frac{1}{2} DA^2 = \sigma\tau. \rightarrow$$

$$K = \frac{1}{2} DA^2 - \frac{1}{2} Dx^2$$

Και η συνάρτηση αυτή είναι 2^{ου} βαθμού, αλλά με τα κοίλα κάτω, όπως στο 2^ο σχήμα.



β) Η απομάκρυνση του σώματος δίνεται από την εξίσωση:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

Αν τώρα το σώμα για $t=0$ βρίσκεται στη θέση $x=-A$, τότε με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$-A = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot 0 + \varphi_0) \rightarrow \eta\mu\varphi_0 = -1 \rightarrow \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$$

Αλλά τότε η δυναμική ενέργεια δίνεται από την εξίσωση:

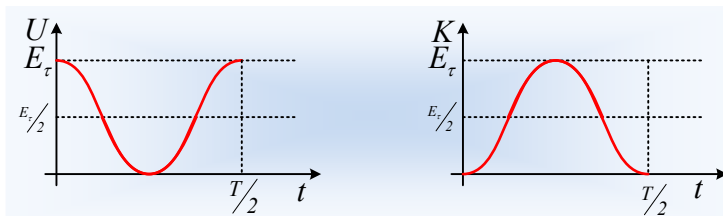
$$U = \frac{1}{2} Dx^2 = \frac{1}{2} DA^2 \cdot \eta\mu^2\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = E_\tau \cdot \eta\mu^2\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad (1)$$

Ενώ ξανά από την ενέργεια ταλάντωσης παίρνουμε:

$$K = \frac{1}{2} DA^2 - \frac{1}{2} Dx^2 = E_\tau - E_\tau \cdot \eta\mu^2\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad (2)$$

Οι δυο παραπάνω συναρτήσεις είναι αρμονικές μετατοπισμένες κατά $\frac{1}{2} E_\tau$ προς τα πάνω, όπως στο

παρακάτω σχήμα.



Σχόλια:

* Μπορεί το διάγραμμα να είναι σωστό, αν η δοθείσα καμπύλη ικανοποιεί τη μαθηματική συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας και τις συγκεκριμένες τιμές. Η μορφή μοιάζει να είναι σωστή...

- 1) Παραπάνω αφήσαμε την εξίσωση της δυναμικής ενέργειας, χωρίς να αλλάξουμε το $\eta\mu^2\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right)$.

Με τη βοήθεια της Τριγωνομετρίας, «αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο», η παραπάνω εξίσωση καταλήγει στην:

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2 \cdot \eta\mu^2\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = E_\tau \cdot \sigma\upsilon\nu^2(\omega t)$$

- 2) Η αρμονικότητα των παραπάνω δύο συναρτήσεων παρουσιάστηκε (λίγο) αυθαίρετα! Ας την δούμε με λίγη παραπάνω Τριγωνομετρία, η οποία μας δίνει ότι:

$$\sigma\upsilon\nu^2\vartheta = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\vartheta}{2}$$

$$U = E_\tau \cdot \eta\mu^2\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = E_\tau \cdot \sigma\upsilon\nu^2(\omega t) = E_\tau \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\omega t}{2} \rightarrow$$

$$U = \frac{1}{2}E_\tau + \frac{1}{2}E_\tau \cdot \sigma\upsilon\nu 2\omega t$$

Η τελευταία εξίσωση μας πληροφορεί ότι η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης, είναι συνημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου με συχνότητα διπλάσια της συχνότητας ταλάντωσης, όπου η καμπύλη έχει μετατοπισθεί κατακόρυφα κατά $\frac{1}{2}E_\tau$.

dmargaris@gmail.com