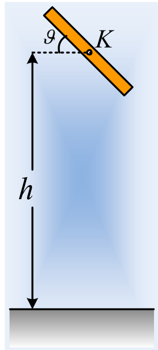
Η πτώση της ράβδου.



Μια ομογενής ράβδος μάζας 12kg και μήκους 2,5m συγκρατείται όπως στο σχήμα, σχηματίζοντας με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ=60°, ενώ το κέντρο της K απέχει h=4,2m από το λείο οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή αφήνεται να πέσει.

i) Η κίνηση της ράβδου θα είναι:

α) μεταφορική, β) σύνθετη

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας, τη στιγμή που η ράβδος κτυπάει στο επίπεδο.

iii) Αν η κρούση είναι ελαστική και το κέντρο K αποκτήσει (μετά την κρούση) ταχύτητα μέτρου $υ_2$=1,15m/s, διαφορετικής κατεύθυνσης από την κατεύθυνση της ταχύτητας πριν την κρούση:

α) Ποια η κατεύθυνση της ταχύτητας $υ_2$;

β) Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μετά την κρούση.

iv) Να υπολογιστούν οι μεταβολές:

α) της ορμής

β) της στροφορμής της ράβδου ως προς οριζόντιο άξονα, κάθετο στη ράβδο που διέρχεται από το K

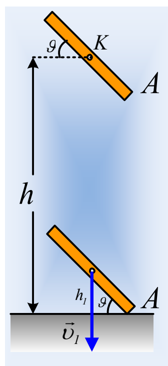
που οφείλονται στην κρούση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνάει από το μέσον της $I= 1/12\ Ml^2$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

i) Μόλις αφεθεί ελεύθερη η ράβδος, η μόνη δύναμη που δέχεται είναι το βάρος η οποία θα του προσδώσει κατακόρυφη επιτάχυνση g. Το βάρος όμως δεν έχει ροπή ως προς το κέντρο μάζας K, με αποτέλεσμα η ράβδος να μην αποκτήσει γωνιακή επιτάχυνση, οπότε η κίνηση είναι μεταφορική (ελεύθερη πτώση). Σωστό το α).

ii) Η ράβδος θα κτυπήσει στο επίπεδο με το άκρο της A, έχοντας ταχύτητα κέντρου μάζας $υ_1$, κατακόρυφη, όπως στο σχήμα. Αλλά τότε το κ.μ. έχει κατέλθει κατά:



$$y = h - h_1 = h - \frac{\ell}{2}\eta\mu\theta = 4{,}2\text{m} - \frac{2{,}5\text{m}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 3{,}2m$$

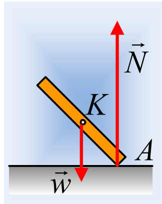
Εφαρμόζοντας τώρα τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, ανάμεσα στην αρχική θέση και ελάχιστα πριν την κρούση, με U=0 στο έδαφος, παίρνουμε:

$$K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}M\upsilon_1^2 = Mgh - Mgh_1 \rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{2gy}$$

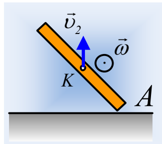
$$\upsilon_1 = \sqrt{2\cdot 10\cdot 3{,}2}m/s = 8m/s$$

iii) Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο, στη διάρκεια της κρούσης, είναι το βάρος και η κάθετη αντίδραση Ν του επιπέδου, δυνάμεις κατακόρυφες.



α) Αλλά τότε κατακόρυφη θα είναι και η μεταβολή της ταχύτητας του κέντρου μάζας, συνεπώς κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω θα είναι και η ταχύτητα του κέντρου μάζας υ_2, αμέσως μετά την κρούση.

β) Η κάθετη αντίδραση Ν του επιπέδου έχει ροπή ως προς το κέντρο μάζας, με αποτέλεσμα η ράβδος να αρχίσει να στρέφεται με κάποια γωνιακή ταχύτητα, αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Η κατάσταση δηλαδή αμέσως μετά την κρούση, είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αλλά από τη στιγμή που η κρούση είναι ελαστική, η κινητική ενέργεια μετά την κρούση, θα είναι ίση με την αντίστοιχη πριν την κρούση:

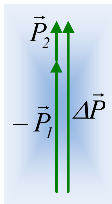


$$K_{πριν} = K_{μετά} \rightarrow \frac{1}{2}M\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 \rightarrow$$

$$M\upsilon_1^2 = M\upsilon_2^2 + \frac{1}{12}M\ell^2\omega^2 \rightarrow$$

$$\omega = \frac{\sqrt{12(\upsilon_1^2-\upsilon_2^2)}}{\ell} = \frac{\sqrt{12(8^2-1{,}15^2)}}{2{,}5}rad/s \approx 11rad/s\,.$$

iv) α) Η ορμή της ράβδου κάθε στιγμή δίνεται από την σχέση $\vec{P} = M\vec{\upsilon}_{cm}$, όπου υ_{cm} η ταχύτητα του κέντρου μάζας Κ. Έτσι η μεταβολή της ορμής της ράβδου είναι ίση:



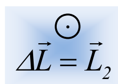
$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \vec{P}_2 + \left(-\vec{P}_1\right)$$

Θεωρώντας δε, θετική τη φορά προς τα πάνω, βρίσκουμε:

$$\Delta P = M\upsilon_2 - M\left(-|\upsilon_1|\right) = M\left(\upsilon_2 + |\upsilon_1|\right)$$

$$\Delta P = 12(1{,}15+8)kgm/s = 109{,}8kgm/s$$

β) Για την αντίστοιχη μεταβολή της στροφορμής ως προς οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο της κίνησης που περνά από το κέντρο μάζας Κ, έχουμε:



$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \vec{L}_2 \rightarrow$$

$$\Delta L = I_{cm}\omega = \frac{1}{12}M\ell^2\omega = \frac{1}{12}12\cdot 2{,}5^2\cdot 11Kgm^2/s = 68{,}75Kgm^2/s.$$

dmargaris@gmail.com