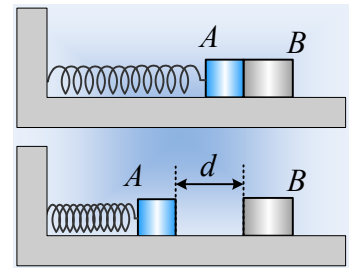


## Ταλαντώσεις και κρούσεις...

Το σώμα Α μάζας  $m=0,2\text{kg}$  ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζώντιου ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς  $k=20\text{N/m}$ , το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε κατακόρυφο τοίχο. Το σώμα Α βρίσκεται σε επαφή με δεύτερο σώμα Β, μάζας  $M$ .

Εκτρέπουμε το σώμα Α προς τα αριστερά, συμπιέζοντας το ελατήριο κατά  $d=0,4\text{m}$  και το αφήνουμε να ταλαντωθεί, οπότε μετά από λίγο, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Β.



i) Αν το σώμα Β έχει μάζα  $M=0,6\text{kg}$ , να υπολογιστούν:

α) Η ταχύτητα του σώματος Α πριν και μετά την κρούση.

β) Η απόσταση των δύο σωμάτων, τη στιγμή που θα μηδενιστεί για δεύτερη φορά (μετά την κρούση) η ταχύτητα του Α σώματος, καθώς και το διάστημα που θα έχει διανύσει μέχρι τη στιγμή αυτή, κάθε σώμα.

ii) Αν  $M=3\text{kg}$ , ζητούνται:

α) Η μεταβολή της ορμής και της κινητικής ενέργειας του σώματος Α, στη διάρκεια της κρούσης του με το σώμα Β.

β) Να αποδειχθεί ότι τα δυο σώματα θα συγκρουστούν ξανά για δεύτερη φορά.

### Απάντηση:

i) Αφού το σώμα Β ισορροπεί, δεν δέχεται δύναμη από το σώμα Α. Αλλά τότε δεν ασκεί και δύναμη στο Α, το οποίο επίσης ισορροπεί. Οπότε δεν δέχεται και δύναμη από το ελατήριο, το οποίο έχει το φυσικό μήκος του.

α) Μόλις αφήσουμε ελεύθερο το σώμα Α, αρχίζει να ταλαντώνεται με μηδενική ταχύτητα, από την ακραία αριστερή θέση της ταλάντωσής του, οπότε το πλάτος της ταλάντωσης είναι  $A_1=d$ . Ελάχιστα πριν την κρούση έχει φτάσει στη θέση ισορροπίας του έχοντας μέγιστη ταχύτητα:

$$v_{max} = \omega A_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} A_1 = \sqrt{\frac{20}{0,2}} 0,4\text{m} = 4\text{m/s}$$

Έτσι μετά την κεντρική και ελαστική κρούση, τα σώματα έχουν ταχύτητες (θεωρούμε την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική):

$$v'_A = \frac{m-M}{m+M} v_{max} = \frac{0,2-0,6}{0,2+0,6} 4\text{m/s} = -2\text{m/s} \quad \text{και}$$

$$v'_B = \frac{2m}{m+M} v_{max} = \frac{2 \cdot 0,2}{0,2+0,6} 4\text{m/s} = 2\text{m/s}$$

β) Μετά την κρούση το Α σώμα θα ξεκινήσει μια νέα ταλάντωση, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, συνεπώς η ταχύτητα  $v'_A$  που υπολογίσαμε προηγούμενα, είναι η μέγιστη ταχύτητα για την νέα ταλάντωση, με την ίδια περίοδο (σώμα Α-ελατήριο), οπότε το νέο πλάτος θα είναι ίσο:

$$v'_A = \omega A_2 \rightarrow A_2 = \frac{v'_A}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{k}} v'_A = \sqrt{\frac{0,2}{20}} 2m = 0,2m$$

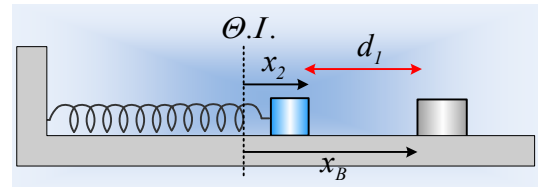
Ας προσεχθεί ότι στην παραπάνω αντικατάσταση, βάλουμε το μέτρο της ταχύτητας!

Έτσι το σώμα Α θα κινηθεί προς τα αριστερά, θα μηδενιστεί για πρώτη φορά η ταχύτητά του σε απομάκρυνση  $x = -A_2$  και κινούμενο στη συνέχεια προς τα δεξιά, θα μηδενιστεί για δεύτερη φορά η ταχύτητά του, στη θέση  $x_2 = +A_2 = +0,2m$ . Συνεπώς το χρονικό διάστημα, από τη στιγμή της κρούσης, μέχρι τη στιγμή που το σώμα Α θα βρεθεί στην θέση  $x_2$  είναι:

$$t_1 = \frac{3}{4}T = \frac{3}{4}2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{0,2}{20}}s \approx 0,47s$$

Στο διάστημα αυτό το σώμα Β έχει μετατοπισθεί κατά:

$$x_B = v_B t_1 = 2 \cdot 0,47m = 0,94m$$



Έτσι, με βάση και το διπλανό σχήμα, η απόσταση των δύο σωμάτων είναι:

$$d_1 = x_B - x_2 = 0,94m - 0,2m = 0,74m$$

Όσον αφορά για τα διαστήματα που έχουν διανύσει τα δυο σώματα:

$$s_A = A_1 + A_1 + A_1 = 3A_1 = 0,6m, \text{ ενώ } s_B = x_B = 0,94m.$$

ii) Αν  $M=3kg$ , τότε οι ταχύτητες μετά την κρούση είναι ίσες:

$$v_A'' = \frac{m-M}{m+M} v_{max} = \frac{0,2-3}{0,2+3} 4m/s = -3,5m/s \text{ και}$$

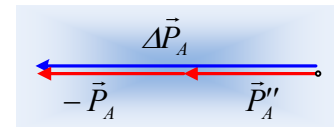
$$v_B'' = \frac{2m}{m+M} v_{max} = \frac{2 \cdot 0,2}{0,2+3} 4m/s = 0,5m/s$$

α) Με βάση τις παραπάνω τιμές, έχουμε για το Α σώμα:

$$\Delta \vec{P}_A = \vec{P}_A'' - \vec{P}_A \rightarrow$$

$$\Delta P_A = m v_A'' - m v_A = 0,2(-3,5 - 4)kgm/s = -1,5kgm/s$$

$$\Delta K_A = K_A'' - K_A = \frac{1}{2}m(v_A''^2 - v_A^2) = \frac{1}{2}0,2(3,5^2 - 4^2)J = -0,375J$$



β) Η νέα ταλάντωση του σώματος Α έχει την ίδια περίοδο (η περίοδος ταλάντωσης δεν εξαρτάται από το πλάτος ή την ενέργεια ταλάντωσης), ενώ για το νέο πλάτος έχουμε:

$$v_A'' = \omega A_3 \rightarrow A_3 = \frac{v_A''}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{k}} v_A'' = \sqrt{\frac{0,2}{20}} 3,5m = 0,35m$$

Αν πρόκειται να υπάρξει δεύτερη κρούση μεταξύ των σωμάτων, αυτή θα πραγματοποιηθεί δεξιά της θέσης ισορροπίας, κάπου μεταξύ των θέσεων  $x=0$  και  $x=0,35m$ , όπου θα βρεθεί κάποια στιγμή το σώμα Α, αν στο μεταξύ δεν «έχει προλάβει» να απομακρυνθεί το Β σώμα.

Όμως το Α σώμα θα βρεθεί στη θέση πλάτους ( $x=+0,35m$ ) τη χρονική  $t_1 = \frac{3}{4}T = 0,47s$ , παίρνοντας

$t=0$  τη στιγμή της κρούσης. Τη στιγμή  $t_1$  το Β σώμα έχει απομακρυνθεί κατά:

$$x_B'' = v_B'' t_1 = 0,5 \cdot 0,47 \text{ m} = 0,235 \text{ m}$$

Απόσταση δηλαδή μικρότερη του πλάτους, πράγμα που σημαίνει ότι πολύ πριν το σώμα Α φτάσει σε θέση πλάτους, θα συγκρουστεί για δεύτερη φορά με το σώμα Β.

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)