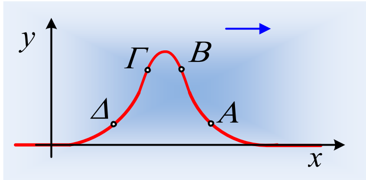
Ταχύτητες και επιταχύνσεις σε ένα παλμό

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου (μιας χορδής), το οποίο ταυτίζεται με τον άξονα x και από αριστερά προς τα δεξιά διαδίδεται ο παλμός του διπλανού σχήματος με ταχύτητα υ.



i) Για τις ταχύτητες στη διεύθυνση y των σημείων Α και Β ισχύει:

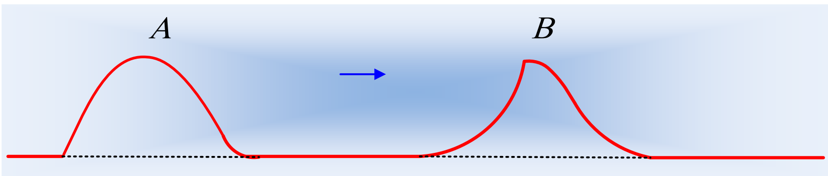
α) $u_A < u_B$, β) $u_A = u_B$, γ) $u_A > u_B$.

ii) Για το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Β ισχύει:

α) $u_B < υ$, β) $u_B=υ$, γ) $u_B > υ$.

iii) Να σημειώστε πάνω στο σχήμα τις επιταχύνσεις των σημείων Α, Β, Γ και Δ.

iv) Να εξετασθεί αν μπορεί να υπάρξει διάδοση των παρακάτω παλμών, κατά μήκος μιας χορδής.



Δίνεται ότι σε όλες τις περιπτώσεις έχουμε μικρές εγκάρσιες απομακρύνσεις στη διεύθυνση y, με αποτέλεσμα να ισχύει η διαφορική εξίσωση του κύματος.

Απάντηση:

….λίγη θεωρία:

Στην ανάρτηση «Η ενέργεια ενός παλμού» είχαμε αποδείξει ότι:

Ας πάρουμε τον τυχαίο παλμό με εξίσωση y=f(x-υt) θέτοντας h=x-υt παίρνουμε για την ταχύτητα ταλάντωσης:

$$\left.\begin{aligned} &u=\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{df(h)}{dh}\cdot\frac{\partial h}{\partial t}\rightarrow u=-\upsilon\cdot\frac{df(h)}{dh}\\ &\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{df(h)}{dh}\cdot\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{df(h)}{dh}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

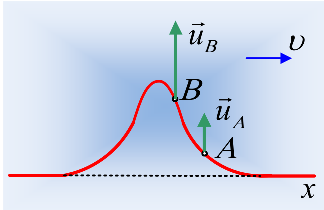
$$\boxed{u=\frac{\partial y}{\partial t}=-\upsilon\cdot\frac{\partial y}{\partial x}}\ (1)$$

Η εξίσωση (1) συνδέει την εγκάρσια ταχύτητα u στη διεύθυνση y, με την κλίση $\frac{\partial y}{\partial x}$ της καμπύλης y=f(x).

Μάλιστα το μέτρο της ταχύτητας u είναι ανάλογο με την παραπάνω κλίση…

i) Με βάση τα παραπάνω οι κλίσεις της καμπύλης στα σημεία Α και Β είναι αρνητικές $\left(\frac{\partial y}{\partial x}<0\right)$, οπότε οι ταχύτητες u των σημείων είναι θετικές, με φορά προς τα πάνω.

Εξάλλου με βάση τη μορφή του παλμού, η κλίση της καμπύλης στο σημείο Β είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη κλίση στο σημείο Α. Συνεπώς $u_B > u_A$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



ii) Για να ισχύει η Δ.Ε. για το κύμα (παλμό) θα πρέπει να έχουμε «ήπιες διαταραχές». Αυτό σημαίνει ότι δεν πρέπει να έχουμε πολύ απότομες κλίσεις στη χορδή. Αλλά αυτό μεταφράζεται ότι η κλίση $\left|\frac{\vartheta y}{\vartheta x}\right| << 1$. Ερχόμενοι λοιπόν στην σχέση (1):

$$|u| = \left|\frac{\vartheta y}{\vartheta t}\right| = \left|-\upsilon \cdot \frac{\vartheta y}{\vartheta x}\right| < \upsilon \quad (2)$$

Η σχέση (2) μας λέει ότι η «φυσική» ταχύτητα u έχει μέτρο **ΠΑΝΤΑ** μικρότερο από την «μαθηματική» ταχύτητα διάδοσης του παλμού υ.

Σχόλιο:

Αξίζει στο σημείο αυτό να επισημανθεί τι δόθηκε φέτος, σαν Γ΄ θέμα στις πανελλαδικές εξετάσεις. Κύμα πλάτους Α=40cm και μήκους κύματος 8cm!!! Αυτό και αν δεν υπακούει σε καμιά διαφορική εξίσωση κύματος…. Και βέβαια υπολογίζονται ταχύτητα κύματος υ=0,1m/s και μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης υ_{max}=3,14m/s!!!! Πόσο όλα αυτά είναι σύμφωνα με την παραπάνω απόδειξη;

…***λίγη ακόμη θεωρία***…

Ας πάρουμε την διαφορική εξίσωση του κύματος:

$$\frac{\vartheta^2 y(x,t)}{\vartheta x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\vartheta^2 y(x,t)}{\vartheta t^2}$$

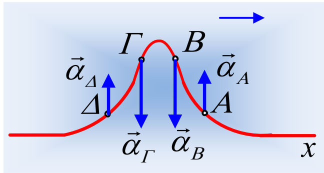
Τι ακριβώς δείχνει το πρώτο μέλος και τι το δεύτερο; $\frac{\vartheta^2 y(x,t)}{\vartheta x^2}$ είναι η δεύτερη (μερική) παράγωγος της συνάρτησης y=f(x). Η οποία $2^η$ παράγωγός δεν δείχνει παρά την καμπυλότητα της καμπύλης! Έτσι αν $\frac{\vartheta^2 y(x,t)}{\vartheta x^2} > 0$ η καμπύλη στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω και αν $\frac{\vartheta^2 y(x,t)}{\vartheta x^2} < 0$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

Τι δείχνει η δεύτερη μερική παράγωγος $\frac{\vartheta^2 y(x,t)}{\vartheta t^2}$; Μα, αυτή είναι η επιτάχυνση στη διεύθυνση y!

Βλέπουμε δηλαδή ότι η καμπυλότητα σε ένα σημείο στο στιγμιότυπο κύματος, καθορίζει την επιτάχυνση του σημείου.

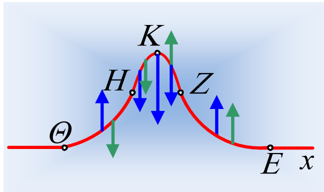
iii) Με βάση τη παραπάνω θεωρία, στα σημεία Α και Δ η καμπύλη στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, οπότε στα σημεία αυτά η επιτάχυνση είναι θετική, με φορά προς τα πάνω.

Αντίθετα στα σημεία Γ και Δ η καμπυλότητα είναι αρνητική, η καμπύλη στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, συνεπώς και η επιτάχυνση των σημείων έχει φορά προς τα κάτω. Με βάση αυτά, τα διανύσματα των ζητούμενων επιταχύνσεων είναι όπως στο διπλανό σχήμα.

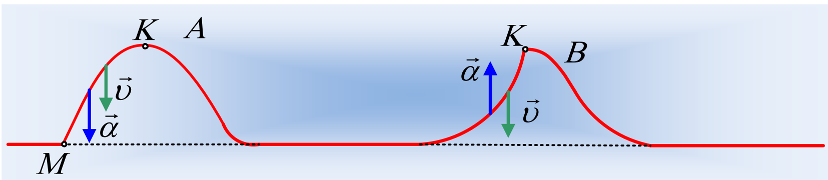


Λίγες περισσότερες διευκρινήσεις:

Έχουμε τον παλμό ο οποίος κινείται προς τα δεξιά. Το σημείο Ε στο οποίο φτάνει ο παλμός έχει μηδενική ταχύτητα και αποκτά επιτάχυνση με φορά προς τα πάνω, οπότε μετά από λίγο θα «ανυψωθεί» αποκτώντας ταχύτητα με φορά προς τα πάνω. Θετική επιτάχυνση έχουν και όλα τα σημεία μεταξύ των σημείων Ε και Ζ (σημείο καμπής), τα οποία επιταχύνονται προς τα πάνω. Αριστερά του σημείου καμπής Ζ, η καμπυλότητα γίνεται αρνητική, τα σημεία έχουν επιτάχυνση προς τα κάτω με αποτέλεσμα να επιβραδύνονται, μέχρι να φτάσουμε στην κορυφή Κ. Αυτή έχει μηδενική ταχύτητα, αλλά επιτάχυνση προς τα κάτω, με αποτέλεσμα να επιταχυνθεί προς τα κάτω. Δείτε τα σημεία μεταξύ Κ και του σημείου καμπής Η. Κινούνται επιταχυνόμενα με φορά προς τα κάτω. Μετά όμως το Η, αλλάζει η καμπυλότητα, η επιτάχυνση γίνεται θετική (φορά προς τα πάνω) και τα σημεία επιβραδύνονται με αποτέλεσμα το άκρο Θ να φτάνει με μηδενική ταχύτητα στη θέση ισορροπίας του.



iv) Κανένας από τους δυο παλμούς δεν μπορεί να υπάρξει!!!



Η δεξιά πλευρά και των δύο παλμών είναι σύμφωνη με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω. Έτσι η ταχύτητα της κορυφής Κ είναι μηδενική και στους δύο παλμούς. Πάμε στις αριστερές πλευρές των παλμών:

Παλμός Α: Όλα τα σημεία μεταξύ Κ και Μ έχουν επιτάχυνση προς τα κάτω με αποτέλεσμα να επιταχύνονται, μέχρι να φτάσουν στη θέση y=0. Αλλά τότε φτάνουν «κάτω» με κάποια ταχύτητα, μέτρου ανάλογου με την κλίση της καμπύλης στο σημείο Μ (εξίσωση (1)). Προφανώς αυτή δεν είναι μηδενική και θα πρέπει τότε να αποκτήσουν **άπειρη** επιτάχυνση για να μηδενιστεί ακαριαία η ταχύτητά τους!!!

Παλμός Β: Εδώ τα πράγματα είναι ακόμη χειρότερα!

Τα σημεία ξεκινούν με μηδενική ταχύτητα αποκτώντας επιτάχυνση με φορά προς τα πάνω, ενώ αποκτούν ταχύτητα προς τα κάτω!!!

dmargaris@gmail.com