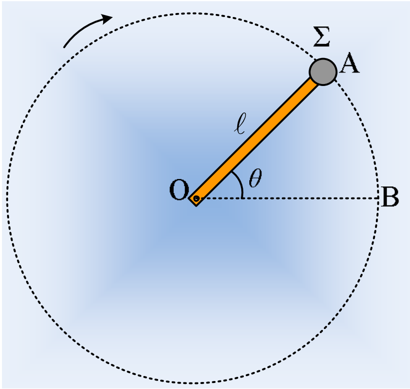
Μια κατακόρυφη κυκλική τροχιά



Μια μικρή σφαίρα Σ, μάζας m=0,5kg, η οποία θεωρείται υλικό σημείο, είναι προσκολλημένη στο άκρο μιας ράβδου μήκους l=1m, η οποία στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος περνά από το άλλο της άκρο Ο, διαγράφοντας κατακόρυφο επίπεδο. Η περίοδος περιστροφής είναι T=$^{2\pi}\!/\!_{\sqrt{6}}\,s \approx 2{,}56\,s$.

i) Τι κίνηση πραγματοποιεί η σφαίρα Σ; Να σχεδιάσετε πάνω στο σχήμα την ταχύτητα και τη γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας.

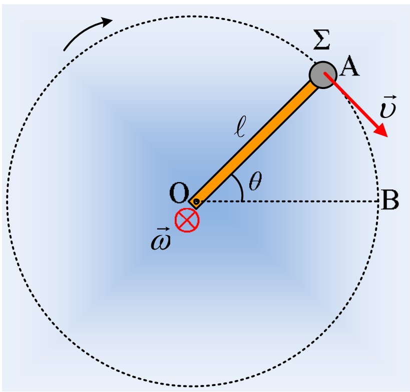
ii) Να υπολογίσετε τα μέτρα της (γραμμικής) ταχύτητας και της γωνιακής ταχύτητας της σφαίρας.

iii) Σε μια στιγμή η σφαίρα περνά από τη θέση Α, όπου η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την οριζόντια διεύθυνση είναι θ=37°. Σε πόσο χρόνο η σφαίρα θα φτάσει (για πρώτη φορά) στη θέση Β με τη ράβδο οριζόντια;

iv) Πόση δύναμη ασκεί η ράβδος στη σφαίρα, στη θέση Α του σχήματος;

Δίνεται g=10m/s^2 ενώ ημ37°=0,6 και συν37°=0,8.

Απάντηση:



i) Η σφαίρα διαγράφει κατακόρυφο κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας R=ℓ με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, συνεπώς η κίνησή της είναι ομαλή κυκλική με περίοδο T=$^{2\pi}\!/\!_{\sqrt{6}}\,s$. Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα διανύσματα της γραμμικής ταχύτητας (εφαπτόμενη στην τροχιά) και της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$, στο κέντρο του κύκλου, οριζόντια, με φορά προς τα μέσα.

ii) Για τα μέτρα της ταχύτητας υ και της γωνιακής ταχύτητας ω έχουμε:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{^{2\pi}\!/\!_{\sqrt{6}}}\,rad/s = \sqrt{6}\,rad/s$$

Και $\upsilon=\omega\cdot R= \sqrt{6}\ m/s$

(θα μπορούσαμε εναλλακτικά να γράψουμε $\upsilon = \frac{2\pi R}{T} = \sqrt{6}\,m/s$)

iii) Η γωνιακή ταχύτητα συνδέεται με την γωνία που διαγράφει το σώμα με την εξίσωση:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{\theta}{\omega}$$

Αλλά στην εξίσωση αυτή πρέπει η γωνία θ να δοθεί σε ακτίνια, όπου:

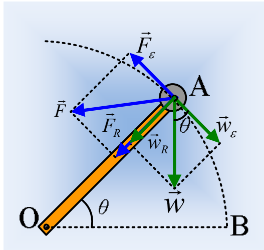
$$\theta = \frac{\mu}{180}\pi = \frac{37\pi}{180} rad \approx 0,2\pi \ \ rad, \text{ οπότε:}$$

$$\Delta t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{0,2\pi}{\sqrt{6}} s \approx 0,26 s$$

iv) Η σφαίρα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, οπότε η συνισταμένη δύναμη που ασκείται πάνω της είναι η κεντρομόλος, με κατεύθυνση προς το κέντρο Ο και μέτρο:

$$F_\kappa = m\frac{\upsilon^2}{R} = 0,5 \cdot \frac{\left(\sqrt{6}\right)^2}{1} N = 3N$$

Όμως οι δυνάμεις που δέχεται η σφαίρα είναι δύο. Το βάρος και μια δύναμη $\vec{F}$ από τη ράβδο, η οποία μας είναι άγνωστη, τόσο σε διεύθυνση, όσο και στο μέτρο της. Έστω ότι έχει διεύθυνση, όπως στο σχήμα, οπότε μπορούμε να την αναλύσουμε σε δυο συνιστώσες, μια στη διεύθυνση της ακτίνας F_R και μια στην διεύθυνση της εφαπτόμενης του κύκλου F_ε, στη θέση Α. Αναλύοντας ταυτόχρονα και το βάρος, παίρνουμε την εικόνα του διπλανού σχήματος.



Αλλά:

$$w_R=mg\cdot\eta\mu\theta=0,5\cdot10\cdot0,6N=3N, \text{ ενώ } w_\varepsilon=mg\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=0,5\cdot10\cdot0,8N=4N$$

Όμως στη διεύθυνση της εφαπτομένης η συνισταμένη των δυνάμεων θα είναι μηδενική, οπότε:

$$\Sigma F_\varepsilon=0 \rightarrow F_\varepsilon=w_\varepsilon=4N$$

Ενώ:

$$\Sigma F_R=F_\kappa \rightarrow F_R+w_R=F_\kappa \rightarrow F_R=0$$

Η δύναμη συνεπώς που δέχεται η σφαίρα από τη ράβδο είναι εφαπτομενική με μέτρο 4N, αντίθετη της συνιστώσας w_ε του βάρους.

dmargaris@gmail.com