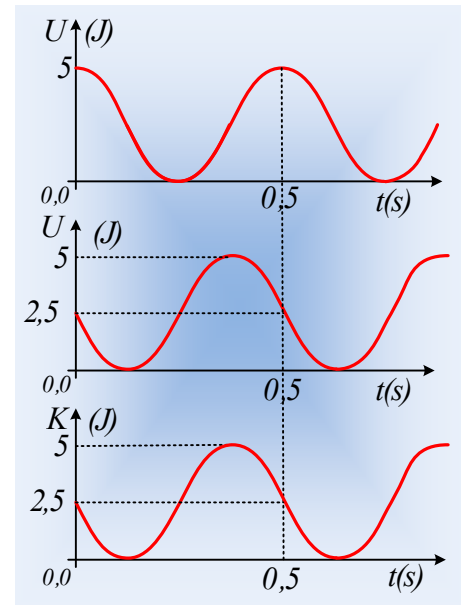


## Διαγράμματα δυναμικής ενέργειας.

Ένα υλικό σημείο μάζας 1kg εκτελεί ΑΑΤ και στο πρώτο διάγραμμα δίνεται η δυναμική του ενέργεια σε συνάρτηση με το χρόνο.

- i) Να βρεθούν η περίοδος και το πλάτος ταλάντωσης.
- ii) Να γίνει η γραφική παράσταση  $x=x(t)$  της απομάκρυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.
- iii) Αν το διάγραμμα είχε τη μορφή του δεύτερου σχήματος, ποια μορφή θα είχε η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης, αν τη στιγμή  $t=0$ , το σώμα κινείται προς την θετική κατεύθυνση;
- iv) Τη στιγμή  $t=0$ , το σώμα κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση, ενώ το αντίστοιχο διάγραμμα κινητικής ενέργειας, έχει τη μορφή του τρίτου διαγράμματος. Να γίνει ξανά η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισοροπίας, σε συνάρτηση με το χρόνο.

Δίνεται  $\pi^2 \approx 10$ .



### Απάντηση:

- i) Με βάση το πρώτο διάγραμμα, το σώμα τη στιγμή  $t=0$ , έχει μέγιστη δυναμική ενέργεια. Αυτό σημαίνει ότι βρίσκεται σε θέση πλάτους. Η δυναμική ενέργεια ξαναγίνεται μέγιστη μετά από 0,5s, πράγμα που σημαίνει ότι χρειάζεται 0,5s, για να μεταβεί από τη μια ακραία θέση του, στην άλλη. Αλλά ο χρόνος αυτός είναι ίσος με  $\frac{1}{2} T$ , οπότε η περίοδος ταλάντωσης είναι  $T=1s$ .

Εξάλλου η μέγιστη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης, δίνεται από την εξίσωση:

$$U_{max} = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m \frac{4\pi^2}{T^2} A^2 \rightarrow$$

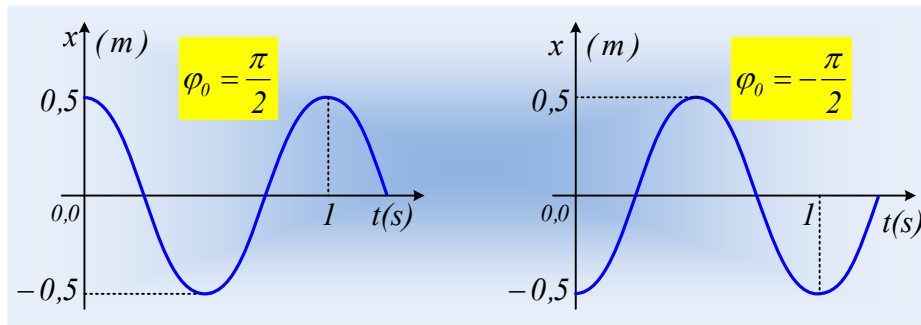
$$A = T \sqrt{\frac{U_{max}}{2m\pi^2}} = 1 \sqrt{\frac{5}{2 \cdot 1 \cdot 10}} m = 0,5m$$

- ii) Αφού το σώμα ξεκινά με μέγιστη δυναμική ενέργεια, βρίσκεται τη στιγμή  $t=0$ , σε ακραία θέση, οπότε η απομάκρυνση θα εμφανίζει αρχική φάση  $\varphi_0 = \pi/2$ , αν ξεκινά από την θέση  $x=+A$  ή  $\varphi_0 = -\pi/2$  αν ξεκινά από τη θέση  $x=-A$ . Έτσι η εξίσωση της απομάκρυνσής του έχει τη μορφή:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \rightarrow$$

$$x = 0,5 \cdot \eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)} \quad \text{ή} \quad x = 0,5 \cdot \eta\mu\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Με γραφικές παραστάσεις:



iii) Ας ακολουθήσουμε τώρα, μια λίγο περισσότερο τυπική πορεία. Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος είναι της μορφής:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

Οπότε η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης είναι της μορφής:

$$U = \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} D A^2 \cdot \eta\mu^2(\omega t + \varphi_0) = U_{\max} \cdot \eta\mu^2(\omega t + \varphi_0)$$

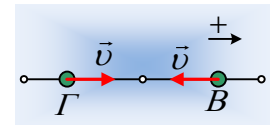
Αντικαθιστώντας τις τιμές για  $t=0$ , παίρνουμε:

$$2,5 = 5 \cdot \eta\mu^2(\omega \cdot 0 + \varphi_0) \rightarrow \eta\mu^2(\varphi_0) = \frac{1}{2} \rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Αλλά τότε η αρχική φάση της απομάκρυνσης, μπορεί να πάρει τις τιμές (υπενθυμίζεται ότι  $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ ):

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4}, \varphi_0 = \frac{3\pi}{4}, \varphi_0 = \frac{5\pi}{4}, \varphi_0 = \frac{7\pi}{4}$$

Όμως με βάση το διάγραμμα, η δυναμική ενέργεια μειώνεται τη στιγμή  $t=0$  ή ισοδύναμα η συνάρτηση είναι φθίνουσα στη «γειτονιά» του  $t=0$ , οπότε το σώμα κινείται προς τη θέση ισορροπίας, αφού τότε μικραίνει το μέτρο της απομάκρυνσης  $x$ . Οπότε με βάση το διπλανό σχήμα, το σώμα θα βρίσκεται τη στιγμή  $t=0$  στη θέση Β ή στη θέση Γ, κινούμενο όπως στο σχήμα. Έχουμε όμως ως δεδομένο ότι τη στιγμή  $t=0$ , το σώμα έχει θετική



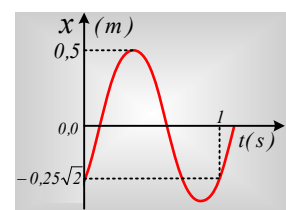
ταχύτητα, συνεπώς η θέση είναι η Γ. Αλλά τότε η αρχική φάση παίρνει την τιμή  $\varphi_0 = \frac{7\pi}{4}$ , αφού είναι η μόνη που ικανοποιεί τις σχέσεις  $x < 0$  και  $v > 0$ . Πράγματι:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot 0 + \varphi_0) = A \cdot \eta\mu\left(\frac{7\pi}{4}\right) < 0 \text{ και}$$

$$v = A\omega \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega \cdot 0 + \varphi_0) = A\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{4}\right) > 0$$

Προφανώς με βάση το διάγραμμα, έχουμε το ίδιο πλάτος και την ίδια περίοδο, με αυτά του i) ερωτήματος, οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσης γίνεται:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) = 0,5 \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{7\pi}{4}\right)$$



Με μορφή όπως στο διπλανό σχήμα.

iv) Η ενέργεια ταλάντωσης παραμένει σταθερή, συνεπώς αφού τη στιγμή  $t=0$  η κινητική ενέργεια είναι  $2,5J$ :

$$K+U=E_{\tau} \rightarrow U=E_{\tau}-K=2,5J.$$

Έχουμε δηλαδή την ίδια κατάσταση με προηγούμενα, με τη διαφορά ότι καθώς περνά ο χρόνος η κινητική ενέργεια μειώνεται, οπότε η δυναμική αυξάνεται, με συνέπεια να αυξάνεται και η απομάκρυνση  $x$ . Ας μην ξεχνάμε όμως ότι το σώμα έχει και αρνητική ταχύτητα!

Αλλά τότε, με βάση την προηγούμενη ανάλυση, σημαίνει ότι τη στιγμή  $t=0$ , περνά από τη θέση  $\Gamma$  και η αρχική φάση παίρνει την τιμή  $\varphi_{0I} = \frac{5\pi}{4}$ , αφού στη θέση αυτή  $x < 0$  και  $\frac{dx}{dt} < 0$  αφού το σώμα έχει αρνητική ταχύτητα απομακρυνόμενο από τη θέση ισορροπίας του. Πράγματι:

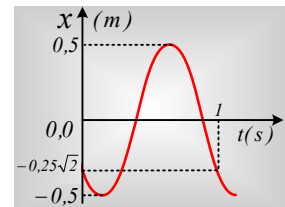
$$x = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot 0 + \varphi_{0I}) = A \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{4}\right) < 0 \text{ και}$$

$$v = A\omega \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega \cdot 0 + \varphi_{0I}) = A\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{4}\right) < 0$$

Αλλά τότε η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι:

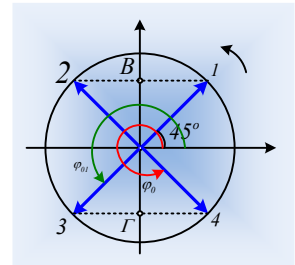
$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_{0I}) = 0,5 \cdot \eta\mu\left(2\pi + \frac{3\pi}{4}\right)$$

Και η μορφή της παραπάνω συνάρτησης είναι αυτή του διπλανού σχήματος.



### Σχόλια.

1) Θα μπορούσαμε να δουλέψουμε με περιστρεφόμενα διανύσματα (τον κύκλο αναφοράς της ταλάντωσης), όπου τη στιγμή  $t=0$  το σώμα περνά από τη θέση  $x = \pm 0,25\sqrt{2}m$ , στο σχήμα σημεία Β και Γ. Αλλά τότε το περιστρεφόμενο διάνυσμα, η προβολή του οποίου μας δίνει την απομάκρυνση, μπορεί να είναι στις θέσεις 1, 2, 3 και 4. Στο ερώτημα ii) το σώμα πλησιάζει στη θέση ισορροπίας με  $v > 0$  και η θέση 4 περιγράφει την κατάσταση, οπότε  $\varphi_0 = \frac{7\pi}{4}$ ,



ενώ στο iii) ερώτημα το σώμα απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο με αρνητική ταχύτητα, θέση 3, όπου  $\varphi_{0I} = \frac{5\pi}{4}$ .

2) Μπορείτε να δείτε και μια ακόμη ανάρτηση για τριγωνομετρικές συναρτήσεις, που χρησιμοποιούμε στις ταλαντώσεις:

[Γραφικές Παραστάσεις Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων.](#)

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)