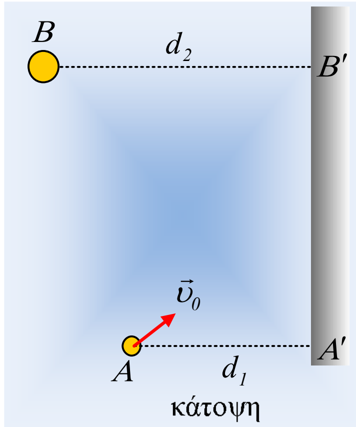
Κρούση μετά από ανάκλαση



Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δυο μικρές σφαίρες με μάζες m_1=0,2kg και m_2=0,8kg αντίστοιχα στα σημεία Α και Β. Οι σφαίρες απέχουν από κατακόρυφο τοίχο αποστάσεις d_1=(ΑΑ΄) =1,2m και d_2 =(ΒΒ΄)=2m, ενώ (Α΄Β΄)=D=2,4m. Τη στιγμή t=0, η πρώτη σφαίρα δέχεται κατάλληλο κτύπημα αποκτώντας ταχύτητα υ_0, με αποτέλεσμα, μετά την ελαστική κρούση της με τον τοίχο, να συγκρουσθεί τη στιγμή t_1=2s με τη δεύτερη σφαίρα κεντρικά και ελαστικά.

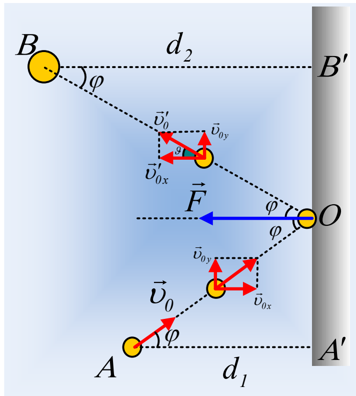
i) Σε ποιο σημείο του τοίχου έγινε η ανάκλαση της σφαίρας και ποιο το μέτρο της αρχικής ταχύτητας υ_0;

ii) Να υπολογισθεί η μεταβολή της ορμής της σφαίρας κατά την κρούση της με τον τοίχο.

iii) Θα επιστρέψει ξανά η πρώτη σφαίρα στην αρχική της θέση Α και αν ναι, ποια χρονική στιγμή θα συμβεί αυτό;

Ο τοίχος είναι λείος και η διάρκεια των κρούσεων αμελητέα.

Απάντηση:



i) Έστω ότι η διεύθυνση της αρχικής ταχύτητας σχηματίζει γωνία φ με την κάθετη ΑΑ΄, ενώ η σφαίρα κτυπά τον τοίχο στο σημείο Ο. Η δύναμη F από τον τοίχο στη διάρκεια της κρούσης, είναι κάθετη σε αυτόν, με αποτέλεσμα να μεταβάλει την συνιστώσα της ταχύτητας υ_{0x} σε υ_{0x}΄, χωρίς να μεταβάλλει τη συνιστώσα της υ_{oy}, την παράλληλη προς τον τοίχο. Αλλά τότε με βάση το διπλανό σχήμα, η γωνία που σχηματίζει η κάθετη στον τοίχο με τη διεύθυνση της υ_0 είναι επίσης φ.

Εξάλλου αφού η κρούση με τον τοίχο είναι ελαστική:

$$K_{\pi\rho\iota\nu}=K_{\mu\varepsilon\tau} \rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2=\frac{1}{2}m_1\upsilon_0'^2 \rightarrow |\upsilon_0|=|\upsilon_0'|$$

Αλλά τότε για την γωνία θ που σχηματίζει η $\vec{\upsilon}_0'$ με την $\vec{\upsilon}_{0x}'$ ισχύει:

$$\eta\mu\theta=\frac{\upsilon_{0y}}{\upsilon_0'}=\frac{\upsilon_{0y}}{\upsilon_0}=\eta\mu\varphi$$

Πράγμα που σημαίνει ότι και η γωνία της ταχύτητας υ_0΄με την κάθετη στο Ο, είναι επίσης φ. Από την Τριγωνομετρία εξάλλου παίρνουμε:

$$\varepsilon\varphi\varphi=\frac{(OA')}{(AA')}\rightarrow(OA')=(AA')\varepsilon\varphi\varphi=d_1\varepsilon\varphi\varphi \quad (1)$$

$$\varepsilon\varphi\varphi=\frac{(OB')}{(BB')}\rightarrow(OB')=(BB')\varepsilon\varphi\varphi=d_2\varepsilon\varphi\varphi \quad (2)$$

Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη παίρνουμε:

$$(OA')+(OB')=(d_1+d_2)\varepsilon\varphi\varphi \rightarrow \varepsilon\varphi\varphi=\frac{D}{(d_1+d_2)}=\frac{2,4}{1,2+2}=\frac{2,4}{3,2}=\frac{3}{4}\rightarrow$$

$$(OA')=d_1\varepsilon\varphi\varphi=1,2\cdot\frac{3}{4}m=0,9m \text{ και } (OB')=1,5m$$

Έτσι η διαδρομή που πρέπει να διατρέξει η πρώτη σφαίρα μέχρι να συγκρουστεί με την δεύτερη, έχει μήκος:

$$s=(OA)+(OB)$$

Όπου $(OA)=\sqrt{d_1^2+(OA')^2}=\sqrt{1,2^2+0,9^2}\,m=1,5m$ και

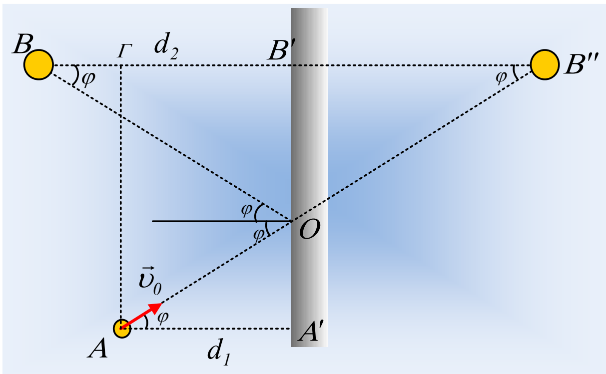
$$(OB)=\sqrt{d_2^2+(OB')^2}=\sqrt{2^2+1,5^2}=2,5m\rightarrow$$

$$s=1,5m+2,5m=4m$$

Οπότε το μέτρο της ταχύτητας είναι:

$$\upsilon_0=\frac{s}{t_1}=\frac{4m}{2s}=2m/s$$

Εναλλακτικά:



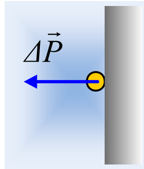
Έστω Β´´ το συμμετρικό του Β ως προς τον τοίχο. Φέρνουμε την ΑΒ´´ η οποία συναντά την επιφάνεια του τοίχου στο Ο. Στο σημείο αυτό, πρέπει να στοχεύσουμε, για να πετύχουμε τη δεύτερη σφαίρα στο Β. Πράγματι τότε, η γεωμετρία επιβάλει την ισότητα των γωνιών φ που έχουν σημειωθεί στο σχήμα, ενώ (ΟΒ)=(ΟΒ´´). Έτσι αν δεν υπήρχε ο τοίχος η πρώτη σφαίρα θα μπορούσε να κτυπήσει την δεύτερη, αν ήταν στο σημείο Β´´, ενώ η παρουσία του τοίχου, της αλλάζει πορεία και σχηματίζοντας την ίδια γωνία φ, με τη γωνία πρόσπτωσης, την στέλνει να συγκρουσθεί στο σημείο Β. Τότε όμως στο τρίγωνο ΑΓΒ´´, θα έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\varphi=\frac{(A\Gamma)}{(\Gamma B'')}=\frac{D}{2d_2-(d_2-d_1)}=\frac{D}{d_1+d_2}=\frac{3}{4}$$

$$\text{Ενώ } s=(AB'')=\sqrt{D^2+(d_1+d_2)^2}=4m$$

Έτσι και πάλι $\upsilon_0=\frac{(AB'')}{t_1}=\frac{s}{t_1}=\frac{4m}{2s}=2m/s$

ii) Η μεταβολή της ορμής κατά την κρούση της σφαίρας με τον τοίχο, οφείλεται στην μεταβολή της συνιστώσας της ταχύτητας στη διεύθυνση την κάθετη προς τον τοίχο (αφού η συνιστώσα η παράλληλη στον τοίχο, υ_{0y} παραμένει σταθερή):



$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{P}_{\alpha\rho\chi} \rightarrow \Delta P = m\upsilon'_{0x} - m\upsilon_{0x}$$

Και θεωρώντας θετική την προς τα δεξιά κατεύθυνση:

$$\Delta P = -m\upsilon'_0\sigma\upsilon\nu\varphi - m\upsilon_0\sigma\upsilon\nu\varphi = -2m\upsilon_0\sigma\upsilon\nu\varphi = -2m\upsilon_0\frac{d_1}{(AO)} \rightarrow$$

$$\Delta P = -2m\upsilon_0\frac{d_1}{(AO)} = -2\cdot 0{,}2\cdot 2\cdot\frac{1{,}2}{1{,}5}kgm/s = \text{-}0{,}64kgm/s$$

iii) Οι ταχύτητες των δύο σφαιρών, μετά την κεντρική και ελαστική μεταξύ τους κρούση θα είναι:

$$\upsilon'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 - + m_2}\upsilon_0 \quad (3) \quad \text{και } \upsilon'_2 = \frac{2m_1}{m_1 - + m_2}\upsilon_0 \quad (4)$$

Με αντικατάσταση στην (3) θεωρώντας θετική την αρχική ταχύτητα $\upsilon_0{'}=\upsilon_0$ παίρνουμε:

$$\upsilon'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 - + m_2}\upsilon_0 = \frac{0{,}2 - 0{,}8}{0{,}2 + 0{,}8}2m/s = -1{,}2m/s$$

Αυτό σημαίνει ότι η πρώτη σφαίρα αποκτά ταχύτητα μέτρου 1,2m/s ίδιας διεύθυνσης με την $\vec{\upsilon}'_0$ αλλά με αντίθετη φορά. Αλλά τότε η σφαίρα θα ανακλαστεί για δεύτερη φορά στο σημείο Ο και θα φτάσει ξανά στο σημείο Α, μετά από χρονικό διάστημα:

$$\upsilon'_1 = \frac{s}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{s}{\upsilon'_1} = \frac{4}{1{,}2}s = \frac{10}{3}s$$

Θα επιστρέψει δηλαδή στη θέση Α, τη χρονική στιγμή t_2, όπου

$$t_2 = t_1 + \Delta t = 2s + \frac{10}{3}s = \frac{16}{3}s \approx 5{,}3s$$

dmargaris@gmail.com