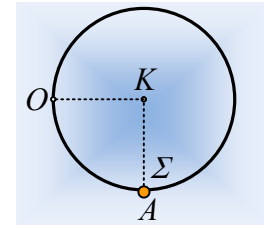


Η στεφάνη και η σημειακή μάζα.

Μια στεφάνη ακτίνας $0,2\text{m}$ και μάζας $m=1\text{kg}$, η οποία θεωρείται συγκεντρωμένη στην περιφέρειά της, μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από ένα σημείο O της περιφέρειάς της. Σε ένα σημείο A της περιφέρειας της στεφάνης, όπου η γωνία OKA είναι ορθή, έχει προσδεθεί ένα σώμα Σ , ίσης μάζας με τη στεφάνη, το οποίο θεωρείται υλικό σημείο, δημιουργώντας έτσι το στερεό s . Στρέφουμε το στερεό s , ώστε η ακτίνα της KA της στεφάνης να είναι κατακόρυφη και σε μια στιγμή ($t_0=0$) το αφήνουμε να περιστραφεί.



- i) Να βρεθεί η ροπή αδράνειας του στερεού s , ως προς τον άξονα περιστροφής στο O .
- ii) Ποια η αρχική επιτάχυνση του σώματος Σ , μόλις αφήσουμε το στερεό να κινηθεί;
- iii) Μετά από λίγο, τη στιγμή t_1 , η ακτίνα KA γίνεται οριζόντια για πρώτη φορά.

Για τη στιγμή αυτή να βρεθούν:

- α) Η γωνιακή ταχύτητα του στερεού και η ταχύτητα του σώματος Σ .
- β) Η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του στερεού s , ως προς τον άξονα περιστροφής του.
- γ) Η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σώματος Σ , ως προς το σημείο O .
- δ) Η κινητική ενέργεια και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας, του στερεού s .
- ε) Η κινητική ενέργεια και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας, του σώματος Σ .

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- i) Η ροπή αδράνειας του στερεού s είναι ίση με το άθροισμα:

$$I_s = \sum m_i r_i^2 + m_\Sigma x^2$$

Όπου το άθροισμα είναι η ροπή αδράνειας της στεφάνης I_1 , ενώ για την απόσταση του σώματος Σ από τον άξονα $x^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$.

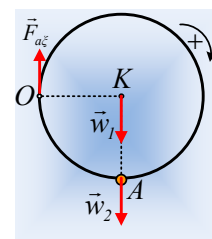
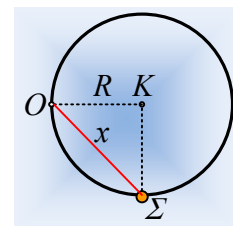
Αλλά από θεώρημα Steiner για τη στεφάνη, έχουμε:

$$I_1 = I_{1K} + mR^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2, \text{ οπότε:}$$

$$I_s = \sum m_i r_i^2 + m_\Sigma x^2 = 2mR^2 + 2mR^2 = 4mR^2 = 4 \cdot 1 \cdot 0,2^2 \text{kgm}^2 = 0,16 \text{kgm}^2.$$

- ii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό s , τη στιγμή $t=0$, αμέσως μόλις αφηθεί να κινηθεί. Εφαρμόζοντας το 2^ο νόμο του Νεύτωνα και με θετική τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, παίρνουμε:

$$\sum \tau_o = I_s \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow w_1 R + w_2 R = I_s \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu/l} \rightarrow$$



$$a_{\gamma\omega v/l} = \frac{2mgR}{I_s} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 0,2}{0,16} \text{ rad} / \text{s}^2 = 25 \text{ rad} / \text{s}^2.$$

Οπότε το σώμα Σ έχει (επιτρόχια) επιτάχυνση, κάθετη στην ακτίνα (OA) περιστροφής του και μέτρου:

$$a_A = a_{\gamma\omega v/l} \cdot x \rightarrow$$

$$a_A = a_{\gamma\omega v/l} \cdot R\sqrt{2} = 25 \cdot 0,2\sqrt{2} \text{ m} / \text{s}^2 = 5\sqrt{2} \text{ m} / \text{s}^2$$

iii) Στο διπλανό σχήμα φαίνονται η αρχική θέση (1) και η τελική (2), όπου η ακτίνα KA γίνεται οριζόντια.

α) Εφαρμόζουμε ΑΔΜΕ για το στερεό s, λαμβάνοντας ως επίπεδο μηδενικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το κέντρο K της στεφάνης, στην θέση (2):

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \rightarrow$$

$$0 + mgR = \frac{1}{2} I_s \cdot \omega^2 + 0 \rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgR}{I_s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 0,2}{0,16}} \text{ rad} / \text{s} = 5 \text{ rad} / \text{s}.$$

Αλλά τότε το σώμα Σ έχει ταχύτητα λόγω της κυκλικής κίνησής του γύρω από το O, μέτρου:

$$v_\Sigma = \omega r = \omega R\sqrt{2} = 5 \cdot 0,2\sqrt{2} \text{ m} / \text{s} = \sqrt{2} \text{ m} / \text{s}$$

Κάθετη στην OA, όπως στο σχήμα.

β) Στη θέση (2) το στερεό s έχει στροφορμή πάνω στον άξονα περιστροφής του, με διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο περιστροφής και φορά προς τα μέσα, με μέτρο:

$$L_s = I_s \omega = 0,16 \cdot 5 \text{ kgm}^2 / \text{s} = 0,8 \text{ kgm}^2 / \text{s}.$$

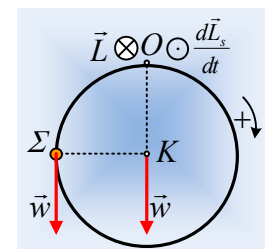
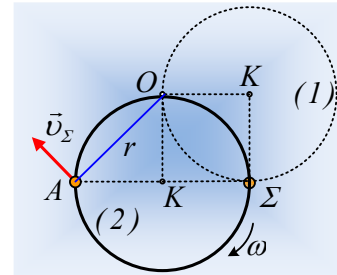
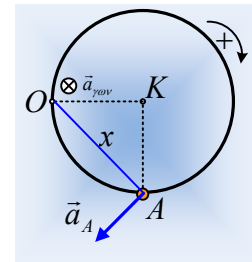
Αντίθετα για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του ως προς τον άξονα στο O, έχουμε:

$$\frac{dL_s}{dt} = \Sigma \tau = -mgR = -1 \cdot 10 \cdot 0,2 \text{ kgm}^2 / \text{s}^2 = -2 \text{ kgm}^2 / \text{s}^2.$$

Με διεύθυνση του άξονα και φορά προς τα έξω (προς τον αναγνώστη), όπως στο σχήμα.

γ) Για το σώμα Σ , το οποίο έχει ταχύτητα v_Σ και διαγράφει κυκλική τροχιά $r = R\sqrt{2}$ γύρω από το σημείο O, η στροφορμή βρίσκεται στην κάθετη στο επίπεδο της σελίδας που περνά από το O (πάνω στον άξονα περιστροφής...) με φορά προς τα μέσα και μέτρο:

$$L_\Sigma = mvr = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot 0,2\sqrt{2} \text{ kgm}^2 / \text{s} = 0,4 \text{ kgm}^2 / \text{s}.$$



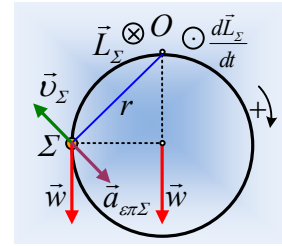
Ενώ ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής, έχει τιμή:

$$\frac{dL_{\Sigma}}{dt} = \frac{d(m|v|r)}{dt} = m \frac{d|v|}{dt} r = m a_{\varepsilon\pi} \cdot r = m a_{\gamma\omega v/2} r^2 = 2m a_{\gamma\omega v/2} R^2.$$

Όμως με εφαρμογή του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα για το στερεό s και για την θέση (2) παίρνουμε:

$$\Sigma\tau = I_s a_{\gamma\omega v/2} \rightarrow -mgR = I_s a_{\gamma\omega v/2} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega v/2} = -\frac{mgR}{I_s} = -\frac{1 \cdot 10 \cdot 0,2}{0,16} \text{rad} / \text{s}^2 = -12,5 \text{rad} / \text{s}^2.$$



Η τιμή αυτή μας λέει ότι το στερεό επιβραδύνεται και η επιτρόχια επιτάχυνση του Σ έχει αντίθετη φορά από την ταχύτητά του, έτσι:

$$\frac{dL_{\Sigma}}{dt} = 2 \cdot 1 \cdot (-12,5) \cdot 0,2^2 \text{kgm}^2 / \text{s}^2 = -1 \text{kgm}^2 / \text{s}^2.$$

Με την ίδια διεύθυνση και φορά προς τα έξω, όπως στο σχήμα.

δ) Η κινητική ενέργεια του στερεού s έχει τιμή:

$$K_s = \frac{1}{2} I_s \omega^2 = mgR = 1 \cdot 10 \cdot 0,2 \text{J} = 2 \text{J}$$

Ενώ ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας:

$$\frac{dK_s}{dt} = P_{\tau} = \tau\omega = -mgR \cdot \omega = -1 \cdot 10 \cdot 0,2 \cdot 5 \text{J/s} = -10 \text{J/s}$$

ε) Οι αντίστοιχες τιμές για το σώμα Σ:

$$K_{\Sigma} = \frac{1}{2} m v_{\Sigma}^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (\sqrt{2})^2 \text{J} = 1 \text{J} \text{ και}$$

$$\frac{dK_{\Sigma}}{dt} = (\Sigma F_{\varepsilon\phi}) \cdot v_{\Sigma} \sin 180^{\circ} = -m |a_{\varepsilon\pi}| v_{\Sigma} = -m |a_{\gamma\omega v/2}| r \cdot v_{\Sigma} \rightarrow$$

$$\frac{dK_{\Sigma}}{dt} = -m |a_{\gamma\omega v/2}| R \sqrt{2} \cdot v_{\Sigma} = -1 \cdot 12,5 \cdot 0,2 \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \text{J/s} = -5 \text{J/s}$$

Σχόλια.

1) Και αν στο τελευταίο ερώτημα μας ζητούσαν το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της στεφάνης; Τότε θα είχαμε:

$$\frac{dK_{\sigma}}{dt} = (\Sigma\tau)\omega = I_s a_{\gamma\omega v} \omega = 2mR^2 a_{\gamma\omega v} \omega = 2 \cdot 1 \cdot 0,2^2 \cdot (-12,5) \cdot 5 \text{J/s} = -5 \text{J/s}$$

Αξίζει να προσέξουμε ότι η κινητική ενέργεια του στερεού μειώνεται κατά 10J/s. Από αυτά, τα 5J/s της στεφάνης και τα υπόλοιπα 5J/s του σώματος Σ.

2) Αλλά και αν θέλαμε το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της στεφάνης, στο υποερώτημα γ) θα είχαμε:

$$\frac{dL_I}{dt} = \Sigma \tau_I = I_I a_{\gamma\omega\nu} = 2mR^2 a_{\gamma\omega\nu} = 2 \cdot 1 \cdot 0,2^2 \cdot (-12,5) = -1 \text{kgm}^2 / \text{s}^2.$$

Κάτι αντίστοιχο και με τους ρυθμούς μεταβολής της στροφορμής! Ο συνολικός ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του στερεού έχει τιμή $-2\text{kgm}^2/\text{s}^2$, όπου $-1 \text{kgm}^2/\text{s}^2$ για τη στεφάνη και $-1 \text{kgm}^2/\text{s}^2$ για το σώμα Σ.

dmargaris@gmail.com