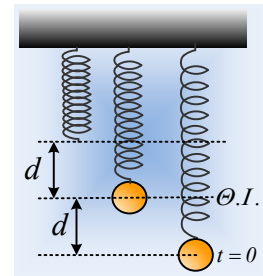


Οι δυναμικές ενέργειες μεταβάλλονται

Ένα σώμα ηρεμεί στο κάτω άκρο ιδανικού ελατηρίου, έχοντας επιμηκύνει το ελατήριο κατά d . Εκτρέπουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα κάτω επίσης κατά d και τη χρονική στιγμή $t=0$ το αφήνουμε ελεύθερο, οπότε εκτελεί ΑΑΤ. Τη στιγμή $t_1=T/3$, όπου T η περίοδος ταλάντωσης, το σώμα περνά από μια θέση Γ . Για τη θέση αυτή και θεωρώντας θετική την προς τα πάνω κατεύθυνση, να βρεθούν:

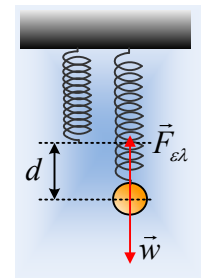


- i) Η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του.
- ii) Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του σώματος.
- iii) Το ποσοστό της ενέργειας ταλάντωσης, το οποίο εμφανίζεται με τη μορφή της κινητικής ενέργειας του σώματος.
- iv) Αν η κινητική ενέργεια του σώματος, στη θέση Γ , μειώνεται κατά $6J/s$, να υπολογιστούν οι ρυθμοί μεταβολής:
 - α) της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης.
 - β) της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g .

Απάντηση:

Το σώμα στη θέση ισορροπίας, $x=0$, δέχεται τις δυνάμεις οι οποίες έχουν σημειωθεί στο διπλανό σχήμα, όπου:



$$\Sigma F=0 \rightarrow F_{ελ}=w \text{ ή } k \cdot \Delta \ell = mg \text{ ή } kd = mg \quad (1).$$

- i) Το σώμα εκτρέπεται μέχρι τη θέση $x=-d$ (αφού τα θετικά είναι προς τα πάνω) και αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα, συνεπώς το πλάτος ταλάντωσης είναι ίσο με d ($A=d$) και από τη γενική εξίσωση για την απομάκρυνσή του

$$x = A \cdot \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \quad (2)$$

θέτοντας $t=0$ και $x=-A$, παίρνουμε:

$$-A = A \cdot \eta \mu \varphi_0 \rightarrow \eta \mu \varphi_0 = -1 \text{ ή } \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$$

Αλλά τότε με αντικατάσταση στην σχέση (2) $t_1=T/3$ θα έχουμε:

$$x_1 = A \cdot \eta \mu \left(\omega t + \frac{3\pi}{2} \right) = d \cdot \eta \mu \left(\frac{2\pi}{T} \frac{T}{3} + \frac{3\pi}{2} \right) = d \cdot \eta \mu \left(2\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{d}{2}$$

Το σώμα δηλαδή βρίσκεται πάνω από τη θέση ισορροπίας του σε απομάκρυνση $x_1=+d/2$ κινούμενο με θετική ταχύτητα (ας σκεφτούμε ότι η άνοδος του, μέχρι την πάνω ακραία θέση διαρκεί $T/2 \dots$)

- ii) Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας λέγεται και επιτάχυνση! Αλλά η επιτάχυνση, μπορεί να υπολογιστεί από το 2^ο νόμο του Νεύτωνα:

$$\Sigma F = ma \rightarrow \alpha = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{-Dx}{m} = -\frac{k}{m} x$$

Όμως από την (1) $\frac{k}{m} = \frac{g}{d}$ και με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$\alpha = -\frac{k}{m}x = -\frac{g}{d} \cdot \frac{d}{2} = -\frac{g}{2}$$

Όπου το (-) μας δείχνει ότι η επιτάχυνση έχει κατεύθυνση προς τα κάτω, προς τη θέση ισορροπίας.

Προφανώς θα μπορούσε κάποιος να χρησιμοποιήσει για τον υπολογισμό της επιτάχυνση και την εξίσωση $\alpha = -\omega^2 \cdot A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \dots$

iii) Η ενέργεια ταλάντωσης στη θέση Γ, εμφανίζεται ως κινητική και ως δυναμική, οπότε:

$$K + U = E_\tau \rightarrow K + \frac{1}{2}Dx_l^2 = \frac{1}{2}DA^2 \rightarrow$$

$$K = \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \frac{1}{2}kd^2 = \frac{3}{4}E_\tau$$

Αλλά αν η κινητική ενέργεια είναι τα $\frac{3}{4}$ της ολικής ενέργειας, αυτό ισοδύναμα μπορεί να εκφραστεί και ως ποσοστό. Το αντίστοιχο ποσοστό είναι 75%! Θέλουμε μαθηματικά; Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi = \frac{K}{E_\tau} 100\% = \frac{\frac{3}{4}E_\tau}{E_\tau} 100\% = 75\%$$

iv) Αφού η ενέργεια ταλάντωσης παραμένει σταθερή, αν μειώνεται η κινητική ενέργεια, τότε ισοδύναμα αυξάνεται η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης.

α) Συνεπώς στην θέση Γ η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης αυξάνεται κατά 6J/s ή ισοδύναμα ο ρυθμός μεταβολής της είναι ίσος με $\frac{dU_\tau}{dt} = +6J/s$.

Θα μπορούσαμε να το πούμε με «περισσότερα» μαθηματικά;

Αν $K+U=\text{σταθ.}$, τότε $\Delta K + \Delta U = 0$ ή

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU_\tau}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dU_\tau}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -(-6)J/s = +6J/s$$

β) Ας δούμε τι ακριβώς συμβαίνει στη θέση Γ. Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, στη θέση Γ.

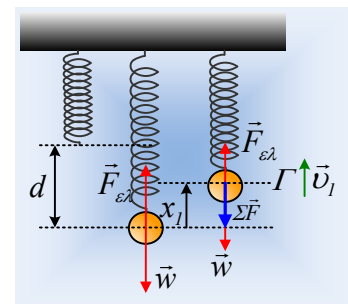
Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος στη θέση αυτή είναι ίσος με:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{ολ}}{dt} = \frac{|\Sigma F| \cdot dx \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{dt} = -|\Sigma F| \cdot \upsilon_l = -kx_l \cdot \upsilon_l$$

Αλλά τότε:

$$\frac{dU_\tau}{dt} = -\frac{dK}{dt} = +kx_l \cdot \upsilon_l = -P_{\Sigma F} \quad (3)$$

δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης, είναι ίσος με το αντίθετο της ισχύος της δύναμης επαναφοράς.



Ας έρθουμε τώρα στο ελατήριο. Η ισχύς της δύναμης του ελατηρίου ($\vec{F}_{ελ}$), ίση με το ρυθμό με τον οποίο το ελατήριο προσφέρει ενέργεια στο σώμα, είναι ίση:

$$P_{F_{ελ}} = \frac{dW_{F_{ελ}}}{dt} = F_{ελ} \cdot v_l = k(d - x_l) \cdot v_l$$

Αλλά η ισχύς αυτή θα είναι αντίθετη με τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου (για παράδειγμα αν το σώμα **παίρνει** ενέργεια 2J/s από το ελατήριο, τότε το ελατήριο **χάνει** ενέργεια 2J/s), οπότε:

$$\frac{dU_{ελ}}{dt} = -P_{F_{ελ}} = -k(d - x_l) \cdot v_l \quad (4)$$

Με διαίρεση κατά μέλη των (4) και (3) παίρνουμε:

$$\frac{\frac{dU_{ελ}}{dt}}{\frac{dU_{τ}}{dt}} = \frac{-k(d - x_l) \cdot v_l}{kx_l \cdot v_l} = -\frac{d - x_l}{x_l} = -\frac{d - d/2}{d/2} = -1 \rightarrow$$

$$\frac{dU_{ελ}}{dt} = -\frac{dU_{τ}}{dt} = -6J/s$$

Σχόλια:

- 1) Το σώμα στη θέση Γ απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας του και η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης αυξάνεται $\frac{dU_{τ}}{dt} > 0$, αντίθετα πλησιάζει τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, με αποτέλεσμα η ελαστική δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης του ελατηρίου, να μειώνεται $\frac{dU_{ελ}}{dt} < 0$.
- 2) Η δυναμική ενέργεια, συνδέεται με το έργο μιας συντηρητικής δύναμης. Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης συνδέεται με το έργο της δύναμης επαναφοράς, οπότε $\frac{dU_{τ}}{dt} = -P_{ΣF} = -P_{F_{επ}}$, ενώ η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, με το έργο της δύναμης του ελατηρίου, όπου $\frac{dU_{ελ}}{dt} = -P_{F_{ελ}}$.
- 3) Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, μεταβάλλεται μέσω του έργου της δύναμης που **δέχεται το ελατήριο** από το σώμα. Η δύναμη αυτή, είναι η αντίδραση της $\vec{F}_{ελ}$, η $\vec{F}'_{ελ}$, μέτρου $\vec{F}'_{ελ} = k(d - x_l)$. Αλλά τότε, ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του ελατηρίου, θα είναι ίσος με το ρυθμό που η παραπάνω δύναμη $\vec{F}'_{ελ}$ μεταφέρει ενέργεια στο ελατήριο, μέσω έργου, οπότε:

$$\frac{dU_{ελ}}{dt} = P_{F'_{ελ}} = \frac{|F'_{ελ}| \cdot |dx| \cdot \sigma \nu 180^\circ}{dt} = -|F'_{ελ}| \cdot |v_l| = -k(d - x_l) \cdot v_l$$

