ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΣΤΗΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ

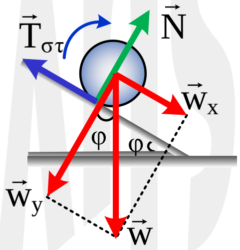
ΘΕΜΑ Β

Α.1 γ, Α.2 δ, Α.3 δ, Α.4 δ Α.5 Λ, Σ, Σ, Λ, Λ

ΘΕΜΑ Β

Β.1 Σωστή απάντηση είναι η **α**.

Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο για την στροφική και την μεταφορική κίνηση.



$$\left.\begin{array}{l}\Sigma F_x = M\alpha_{cm} \\ \Sigma\tau = I_{cm}\alpha_\gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Mg\eta\mu\varphi - T_{στ} = M\alpha_{cm} \\ T_{στ}R = \dfrac{2}{5}MR^2\dfrac{\alpha_{cm}}{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Mg\eta\mu\varphi - T_{στ} = M\alpha_{cm} \\ T_{στ} = \dfrac{2}{5}M\alpha_{cm}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$g\eta\mu\varphi = \frac{7}{5}\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{5g\eta\mu\varphi}{7} \Rightarrow \alpha_{cm} = 4\frac{m}{s^2} \quad \text{και} \quad \alpha_{cm} = \alpha_\gamma R \Rightarrow \alpha_\gamma = 20\frac{rad}{s^2}$$

Η γωνία που διαγράφει ως την στιγμή t_1 είναι $\theta_1 = \frac{1}{2}\alpha_\gamma t_1^2 \Rightarrow \boldsymbol{\theta_1 = 1{,}6\,rad}$

Η γωνιακή ταχύτητα την στιγμή t_1 είναι: $\omega = \alpha_\gamma t_1 \Rightarrow \omega = 8$ rad/s.

Στο λείο επίπεδο η κίνηση είναι ομαλή στροφική άρα $\theta_2 = \omega\Delta t \Rightarrow$ **θ_2 = 2,4 rad**.

Η συνολική γωνία στροφής είναι: $\theta = \theta_1 + \theta_2 \Rightarrow$ **θ = 4 rad**. Οι δε στροφές είναι: $N = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{2}{\pi}$ στροφές .

Β.2 Σωστή απάντηση είναι η **β**.

Εφόσον η τελική ροπή αδράνειας μειώνεται κατά 20% θα είναι $I_2 = I_1 - 0{,}2I_1 \Rightarrow I_2 = 8\ kg\cdot m^2$.

Στο σύστημα δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές οπότε διατηρείται η στροφορμή.

$$\vec{L}_{αρχ} = \vec{L}_{τελ} \Rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1\omega_1}{I_2} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_2 = 10\frac{rad}{s}}$$

Έχουμε: $W = K_{τελ} - K_{αρχ} = \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 \Rightarrow W = (400-320)\,J \Rightarrow \boldsymbol{W = 80\,J}$

Άρα η αθλήτρια δαπάνησε 80 J για να φέρει τα χέρια της κοντά της.

Β.3 Σωστή απάντηση είναι η γ.

Το σύστημα είναι μονωμένο άρα ισχύει η Α.Δ.Ο.

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow m\upsilon = (m + M_1 + M_2)V \Rightarrow$$

$$V = \frac{m\upsilon}{m + M_1 + M_2} \Rightarrow \mathbf{V = 5{,}2\,\frac{m}{s}}$$

Επίσης ισχύει η Α.Δ.Σ.

$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow m\upsilon R = (mR^2 + \frac{1}{2}M_1R^2)\omega \Rightarrow \omega = \frac{m\upsilon}{mR + \frac{1}{2}M_1R} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 100\,\frac{rad}{s}}$$

Θεωρώντας θετική την αρχική φορά του βλήματος έχουμε: $\upsilon_{\alpha\nu\omega\tau} = V - \omega R \Rightarrow$ **$|\upsilon_{\alpha\nu\omega\tau}| = 14{,}8$ m/s**.

Β.4 Σωστή απάντηση είναι η **β**.

Τα δύο σώματα έχουν την ίδια δυναμική ενέργεια αρχικά, άρα στην βάση θα έχουν ίσες κινητικές ενέργειες, μιας και δεν έχουμε απώλειες.

$$K_{\kappa\acute{\upsilon}\beta o\upsilon} = K_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma} \Rightarrow K_{\kappa\acute{\upsilon}\beta o\upsilon} = K_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma,\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi o\rho} + K_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma,\sigma\tau\rho o\varphi} \Rightarrow K_{\kappa\acute{\upsilon}\beta o\upsilon} > K_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma,\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi o\rho}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}M\upsilon_{\kappa\upsilon\beta}^2 > \frac{1}{2}M\upsilon_{\sigma\varphi}^2 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_{\kappa\upsilon\beta} > \upsilon_{\sigma\varphi}}$$

Σημείωση: στο ίδιο συμπέρασμα μπορούσαμε να καταλήξουμε και με τύπους δυναμικής.

ΘΕΜΑ Γ

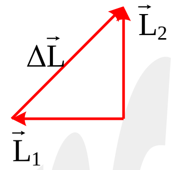
α. Όταν ο δίσκος θα έχει ολοκληρώσει 2 περιστροφές η γωνία που θα διαγράψει θα είναι

$\theta = 2\cdot 2\pi$ rad $= 4\pi$ rad.

Με εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W \Rightarrow \frac{1}{2}I\omega^2 = \tau_F\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega^2 = FR\theta \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{4F\theta}{MR}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 20\,\frac{rad}{s}}$$

β. Αφού δεν μεταβάλλεται το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ισχύει: $|\vec{L}_{αρχ}| = |\vec{L}_{τελ}| = L = Iω$



Η ροπή αδράνειας είναι: $I = \frac{1}{2}MR^2 \Rightarrow I = 0{,}8\,kg \cdot m^2$

Άρα L = Iω ⇒ L = 16 kg·m²/s.

$\Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 \Rightarrow \Delta L = \sqrt{L_{αρχ}^2 + L_{τελ}^2} = \sqrt{L^2 + L^2} = L\sqrt{2} \Rightarrow \mathbf{\Delta L = 16\sqrt{2}}$ **kg·m²/s.**

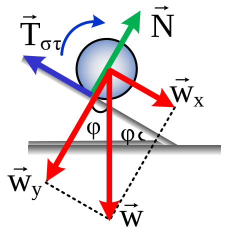
Έχουμε $\Sigma\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow Fd_1 = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow F = \frac{\Delta L}{d_1 \cdot \Delta t} \Rightarrow \mathbf{F = 80\,N}$

γ. Κατά την κρούση δεν αναπτύσσονται εξωτερικές ροπές οπότε ισχύει η Α.Δ.Σ.

$\vec{L}_{αρχ} = \vec{L}_{τελ} \Rightarrow L = (I + md^2)\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{L}{I + md^2} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_2 = 16\frac{rad}{s}}$

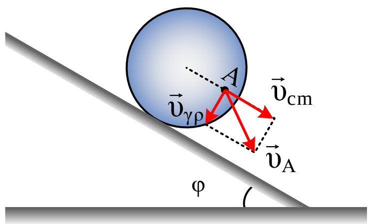
Άρα $L_{σωμ.} = md^2\omega_2 \Rightarrow L_{σωμ.} = 3{,}2\frac{kg \cdot m^2}{s}$

δ. Σύμφωνα με το σχήμα έχουμε:



$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F_x = M\alpha_{cm} \\ \Sigma\tau = I_{cm}\alpha_γ \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Mgημφ - T_{στ} = M\alpha_{cm} \\ T_{στ}R = \frac{1}{2}MR^2\frac{\alpha_{cm}}{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Mgημφ - T_{στ} = M\alpha_{cm} \\ T_{στ} = \frac{1}{2}M\alpha_{cm} \end{array}\right\} \Rightarrow gημφ = \frac{3}{2}\alpha_{cm}$$

$$\Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{2gημφ}{3} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_{cm} = 2\frac{m}{s^2}}.$$



ε. Την στιγμή t_1 η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι:

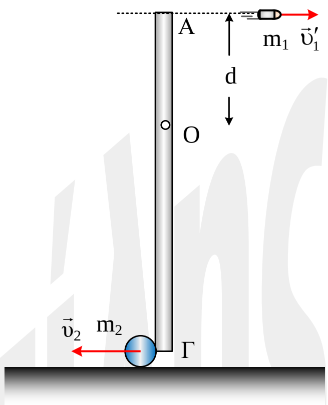
$υ_{cm} = α_{cm}t_1 \Rightarrow \mathbf{υ_{cm} = 4}$ **m/s.**

Η γωνιακή ταχύτητα την ίδια στιγμή είναι: $υ_{cm} = ωR \Rightarrow$ **ω = 10 rad/s.**

Η γραμμική ταχύτητα του σημείου Α είναι: $υ = ωd_2 \Rightarrow$ **υ = 3 m/s.**

Έτσι λοιπόν το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Α είναι $\vec{υ}_A = \vec{υ} + \vec{υ}_{cm} \Rightarrow υ_A = \sqrt{υ^2 + υ_{cm}^2} \Rightarrow \boldsymbol{υ_A = 5\frac{m}{s}}$

ΘΕΜΑ Δ



α. Ως προς το Ο η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών είναι μηδέν, άρα ισχύει η Α.Δ.Σ.

$$\vec{L}_{αρχ} = \vec{L}_{τελ} \Rightarrow m_1\upsilon_1 d = m_1\upsilon_1' d + m_2\upsilon_2(\ell - d) \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{m_1(\upsilon_1 - \upsilon_1')d}{m_2(\ell - d)} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_2 = 2\ \frac{m}{s}}$$

Η απώλεια της κινητικής ενέργειας είναι:

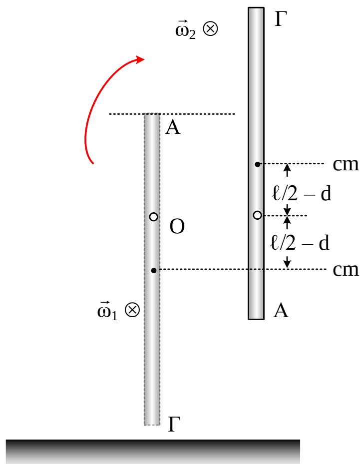
$$E_{απ} = K_{αρχ} - K_{τελ} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 \Rightarrow \boldsymbol{E_{απ} = 952\,J}$$

β. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το σημείο Ο είναι:

$$I = I_{cm} + M(\frac{\ell}{2} - d)^2 \Rightarrow \boldsymbol{I = 0{,}16\,kg \cdot m^2}$$

Ως προς το Ο η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών είναι μηδέν, άρα ισχύει η Α.Δ.Σ.

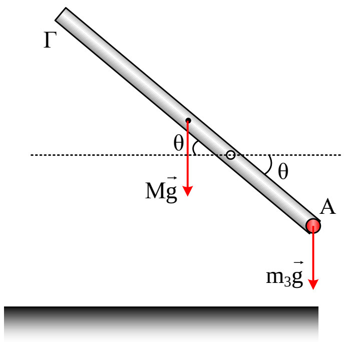
$$\vec{L}_{αρχ} = \vec{L}_{τελ} \Rightarrow m_1\upsilon_1 d = m_1\upsilon_1' d + I\omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{m_1(\upsilon_1 - \upsilon_1')d}{I} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_1 = 20\ \frac{rad}{s}}$$



Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την ράβδο, αμέσως μετά την κρούση ως την στιγμή που φτάνει στο ανώτερο σημείο. (Το κέντρο μάζας της ανεβαίνει κατά 2(ℓ/2 – d) = ℓ/3)

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W \Rightarrow K_2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 = W_w \Rightarrow K_2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 = -Mg\frac{\ell}{3} \Rightarrow$$

$$K_2 = \frac{1}{2}I\omega_1^2 - Mg\frac{\ell}{3} \Rightarrow \boldsymbol{K_2 = 24\,J}$$



γ. Η κίνηση του στερεού που προκύπτει μετά την ενσφήνωση του m3 πάνω στην ράβδο είναι ομαλή κυκλική.

Αυτό σημαίνει ότι για το σύστημα ράβδος – m3 σε οποιαδήποτε θέση ισχύει Στ = 0 (αδιάφορη ισορροπία).

Σε τυχαία θέση λοιπό θα έχουμε:

$$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow m_3 g d συνθ = Mg(\frac{\ell}{2} - d)συνθ \Rightarrow m_3 = \frac{M(\frac{\ell}{2} - d)}{d} \Rightarrow \boldsymbol{m_3 = 2\,kg}$$

δ. Η μάζα m_3 θα αποκτήσει μέγιστη δυναμική ενέργεια όταν βρεθεί στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς της.

Για να συμβεί αυτό θα πρέπει να εκτελέσει μισή στροφή, η αλλιώς $\Delta\theta = \pi$ rad.

Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου λίγο πριν την κρούση με το σώμα μάζας m_3 είναι:

$$K_2 = \frac{1}{2} I\omega_2^2 \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{2K_2}{I}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_2 = 10\sqrt{3}\,\frac{rad}{s}}$$

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Σ. για την κρούση και έχουμε (θεωρούμε θετική την ωρολογιακή φορά):

$$\vec{L}_{αρχ} = \vec{L}_{τελ} \Rightarrow I\omega_2 - m_3\upsilon_3 d = (I + md^2)\omega \Rightarrow \omega = \frac{I\omega_2 - m_3\upsilon_3 d}{I + md^2} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 2\,\frac{rad}{s}}$$

Άρα λοιπόν έχουμε: $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta t = \frac{\pi}{2}\,s}$.