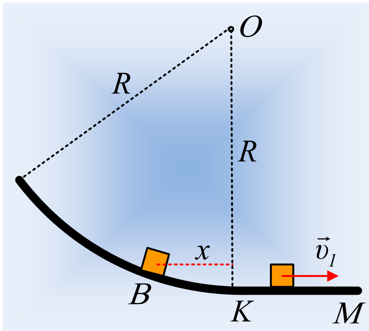
Η κίνηση σε κυλινδρική επιφάνεια



Ένα μικρό σώμα $Σ_1$ μάζας m_1= 0,1kg αφήνεται τη στιγμή t_0=0 να κινηθεί στο σημείο Β, στο εσωτερικό μιας λείας κυλινδρικής επιφάνειας, κέντρου Ο και ακτίνας R=4m. Μετά από λίγο, το σώμα φτάνει στο λείο οριζόντιο επίπεδο ΚΜ, με ταχύτητα $υ_1$, όπως στο σχήμα. Το σημείο Β απέχει κατά x_1=0,2m από την κατακόρυφο ΟΚ, που περνά από το κέντρο Ο της κυλινδρικής επιφάνειας.

i) Να αποδείξτε ότι η κίνηση του σώματος από τη θέση Β μέχρι να φτάσει στο οριζόντιο επίπεδο (θέση Κ) μπορεί να θεωρηθεί απλή αρμονική ταλάντωση.

ii) Να υπολογίσετε την τελική ταχύτητα $υ_1$ του σώματος στο οριζόντιο επίπεδο.

iii) Πόσο απέχει το σώμα από το σημείο Κ τη χρονική στιγμή t_1=2s;

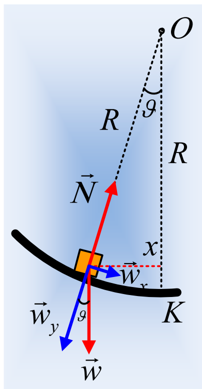
iii) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα αφήνοντας τώρα ένα δεύτερο σώμα $Σ_2$ μάζας m_2=0,2kg, σε σημείο Γ της κυλινδρικής επιφάνειας, το οποίο απέχει κατά x_2=0,4m από την κατακόρυφο ΟΚ. Να εξετάσετε την ορθότητα ή μη των προτάσεων:

α) Το σώμα $Σ_2$ θα χρειαστεί περισσότερο χρόνο (από το $Σ_1$) για να φτάσει στο σημείο Κ.

β) Για την τελική ταχύτητα του $Σ_2$ ισχύει $υ_2=2υ_1$.

Δίνεται $π^2$≈10 και g=10m/s^2,

Απάντηση:

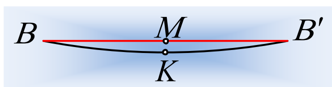


i) Στο διπλανό σχήμα, το σώμα $Σ_1$ βρίσκεται σε μια τυχαία θέση, κατά την κίνησή του στην κυλινδρική επιφάνεια, απέχοντας κατά x από την κατακόρυφο που περνά από το κέντρο Ο. Οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω του, βάρος και κάθετη αντίδραση Ν του επιπέδου. Στην διεύθυνση της ακτίνας η συνισταμένη δύναμη παίζει το ρόλο της κεντρομόλου, υπεύθυνη για την αλλαγή της διεύθυνσης της ταχύτητας:

$$ΣF_R = N - w\cdot συνθ = m\frac{υ^2}{R}$$

Συνεπώς το σώμα «επιταχύνεται» προς το Κ από την συνιστώσα w_x η οποία καθορίζει και την κίνηση του σώματος. Μπορούμε δηλαδή να γράψουμε:

$$ΣF = ΣF_x = mg\cdot ημθ = mg\cdot\frac{x}{R} = \frac{mg}{R}\cdot x \quad (1)$$



Αλλά επειδή η οριζόντια εκτροπή x του σώματος από την κατακόρυφη είναι πολύ μικρότερη της ακτίνας R, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κίνηση του σώματος δεν πραγματοποιείται πάνω στο τόξο ΒΚΒ΄, αλλά πάνω στη χορδή ΒΜΒ΄, όπως στο διπλανό σχήμα (αν x<<R, η «διάκριση» μεταξύ τόξου και χορδής δεν μπορεί καν να γίνει δια γυμνού οφθαλμού…), γύρω από τη θέση ισορροπίας Μ, αντί του Κ!

Αλλά τότε η w_x μπορεί να θεωρηθεί ότι βρίσκεται πάνω στην ΒΜ με κατεύθυνση προς το Μ, είναι δηλαδή μια **δύναμη επαναφοράς**, με μέτρο ανάλογο της απομάκρυνσης x, σύμφωνα με την σχέση (1), πράγμα που σημαίνει ότι η κίνηση μπορεί να θεωρηθεί ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς $D = \frac{mg}{R}$.

ii) Από τη στιγμή που θεωρούμε την κίνηση ΑΑΤ, η ταχύτητα του σώματος μόλις φτάσει στο Κ, θα είναι η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης με μέτρο:

$$\upsilon_1 = \omega A_1 = \sqrt{\frac{D}{m}} A_1 = \sqrt{\frac{g}{R}} \cdot x_1 = \sqrt{\frac{10}{4}} \cdot 0{,}2m/s = 0{,}314m/s$$

iii) Το σώμα θα χρειαστεί χρονικό διάστημα t΄ = ¼ T για να φτάσει στο οριζόντιο επίπεδο:

$$t' = \frac{1}{4} 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{4}{10}} = 1s$$

Αλλά τότε στο οριζόντιο επίπεδο, μέχρι τη στιγμή t_1 το σώμα διανύει απόσταση:

$$d = \upsilon_1 (t_1 - t') = 0{,}314 \cdot (2-1)m = 0{,}314m$$

iv) Και πάλι η απομάκρυνση είναι πολύ μικρότερη της ακτίνας, συνεπώς και το σώμα Σ_2 θεωρούμε ότι εκτελεί ΑΑΤ με πλάτος $A_2 = x_2 = 0{,}4m$. Οπότε με βάση αυτό έχουμε:

α) Η πρόταση είναι λανθασμένη, αφού το χρονικό διάστημα που θα χρειαστεί για να φτάσει στο σημείο Κ είναι ίσο με ¼ Τ (το ¼ της περιόδου) και δεν εξαρτάται από το πλάτος ταλάντωσης.

β) Η πρόταση είναι σωστή. Πράγματι έχουμε:

$$\upsilon_2 = \upsilon_{2,max} = \omega A_2 = \omega x_2 = \omega \cdot 2x_1 = 2 \cdot \omega x_1 = 2\upsilon_1$$

dmargaris@gmail.com